



*Филиал федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Астраханский государственный технический университет» в
Ташкентской области Республики Узбекистан*

Факультет высшего образования

Кафедра «Водные биоресурсы и технологии»

РАЗРАБОТКА И ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В АКВАКУЛЬТУРЕ

**Методология системного подхода к задачам оптимизации;
основы теории оптимизации и исследования операций;
решение типовых задач оптимизации с помощью табличного
процессора MS Excel**

Методические указания
по дисциплине «Разработка и оптимизация технологических процессов в аквакультуре»
по направлению подготовки магистров 35.04.07 Водные биоресурсы и аквакультура

Ташкентская область, Кибрайский район – 2025

Составители:

д.с/х.н., профессор кафедры «ВБиТ» Лагуткина Л.Ю.

Рецензент: д.с/х.н., профессор кафедры «ВБиТ» Грозеску Ю.Н.

Методические указания по выполнению самостоятельной работы по дисциплине (модулю) «Разработка и оптимизация технологических процессов в аквакультуре»

Методические указания содержат основные положения методологии системного моделирования, сведения по теории оптимизации, набор методов решения задач различного типа с помощью табличного процессора Microsoft Excel.

Методические указания рассмотрены и одобрены на заседании кафедры «ВБиТ»

Протокол от 21.02.2025 г. № 7

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Введение	4
<i>Введение в методологию системного моделирования и теорию оптимизации</i>	6
1. Системный анализ и исследование операций – теоретическая основа для решения задач оптимизации технологических процессов в аквакультуре	6
2. Типовые постановки задач системного анализа и их связь с задачами оптимизации при разработке и совершенствовании технологических процессов	15
3. Оценка технологической схемы хозяйства аквакультуры и обоснование целесообразности его реконструкции; методы построения оптимальной технологической схемы; оценка биотехнической и экономической эффективности технологий в аквакультуре	19
4. Классификации методов моделирования систем	22
5. Электронные таблицы MS Excel как средство автоматизации вычислений при решении задач оптимизации технологических процессов в аквакультуре	26
<i>Методы оптимизации; решение задач оптимизации с помощью табличного процессора</i>	
6. Общая модель для задач оптимизации, классификация задач и основные подходы к решению	28
7. Одномерные задачи оптимизации технологических процессов в аквакультуре и их решение с помощью MS Excel	36
8. Линейное программирование как наиболее широко применяемая методология для решения производственных задач оптимизации. Общая характеристика и математическая постановка задач	46
9. Задача о рационе для объектов аквакультуры и методика ее решения с помощью табличного процессора MS Excel	49
10. Графические методы решения задач линейного программирования (с применением средств MS Excel) – преимущества и ограничения. Задачи производственного планирования в аквакультуре и способы их графического решения в среде MS Excel	50
11. Транспортная задача линейного программирования, значение данного класса задач для крупных производственных объединений рыбохозяйственного профиля	59

12. Задачи оптимизации с булевыми переменными: задача о назначении, ее значимость как компонента стратегии управления человеческими ресурсами на предприятиях рыбохозяйственного профиля	64
Вопросы для семинаров и контрольных заданий	74

Введение

В настоящее время одним из ключевых конкурентных преимуществ для предприятий рыбохозяйственного комплекса, особенно тех, что являются частными предприятиями, является эффективность, понимаемая, прежде всего, как путь достижения максимальной прибыли при минимальных расходах, в частности, максимально возможном снижении издержек.

В современных условиях постоянного технологического прогресса существенный вклад в эффективность предприятия вносит уровень технологических процессов, их организации и планирования процессов в целом и отдельных стадий технологических циклов. Повышение эффективности функционирования предприятия как правило достигается путем проведения определенных процедур оптимизации, понимаемой как улучшение целевых показателей производства при максимальном снижении издержек и, желательно, минимальными усилиями. Оптимизироваться может как экономическая деятельность, в частности, организация сбыта, так и кадровая политика предприятия, в особенности в части процедуры поиска и найма новых кадров, которые смогут создать востребованный в условиях рыбной конкуренции продукт и, конечно же, оптимизация непосредственно технологического цикла производства товарной продукции (от выращивания личинок и молоди до оптимизация состава кормосмеси рецептов кормов для рыб, а так же структуры кормовых сообществ, исследуемая Левич с соавт. (1996) и др.).

В основе процедур оптимизации технологических процессов лежит математическая теория решения задач оптимизации, в частности, математические методы исследования операций. Знание теории методов нахождения оптимальных решений владельцами и работниками предприятия может стать ключевым фактором повышения конкурентоспособности, а то и выживания фирм рыбохозяйственного комплекса. Требования знания методов оптимизации также содержатся и в современных профессиональных стандартах для специалистов в области рыбного хозяйства и аквакультуры. Например, профессиональный стандарт «Инженер-рыбовод» содержит трудовые функции по оптимизации деятельности предприятия аквакультуры, а аналогичный стандарт с наименованием «Специалист по техническим средствам аквакультуры» предъявляет требования знания методов оптимизации технологического процесса выращивания гидробионтов. Еще один важный фактор последних десятилетий – интенсивное развитие и распространение средств вычислительной техники и программных комплексов, позволяющих автоматизировать и существенно облегчить и ускорить процесс решения подобных задач, в том числе весьма сложных.

С учетом изложенных обстоятельств данные методические указания нацелены на изложение в доступной форме, в т.ч. на практических примерах, теории и методов оптимизации для обучающихся по направлению 35.04.07 Водные биоресурсы и аквакультура. Также в качестве теоретического материала для предварительного изучения предложены основы методологии системного моделирования, играющей значительную роль при исследовании, моделировании и оптимизации сложных технологических процессов, а также основы разработки таких процессов (последняя область знаний в большей степени ориентирована на НИОКР). С учетом уровня подготовки студентов в области математики и информационных технологий, издание ориентировано на обучение технологии и методам решения задач оптимизации технологических процессов в аквакультуре с помощью табличного процессора Microsoft Excel. Версия программного обеспечения не играет существенной роли, но разъяснения по основным операциям

настройки программы и работы ориентированы на версию программы не ниже MS Excel 2007.

В процессе работы помимо решения предложенных примеров и задач для обучающихся желательно обучающимся самостоятельно придумывать и предлагать практические примеры того или иного типа задач в области аквакультуры, поскольку для специалиста рыбохозяйственного комплекса умение грамотно сформулировать проблему и формализовать ее для последующего анализа и поиска возможных способов решения ничуть не менее важно, чем умение решать предварительно сформулированные и формализованные задачи.

Список основных обозначений

$\forall$ - квантор всеобщности (запись $\forall x$ читается так: «для всех x » или «для произвольного x »);

$\exists$ - квантор существования (запись $\exists x$ читается так: «найдется x » или «существует x »);

$x \in A$ – элемент x принадлежит множеству A ;

R – множество действительных чисел;

R_+ - множество неотрицательных действительных чисел;

$f: X \rightarrow R$ – функция f , определенная на множестве X и принимающая действительные значения;

$f(x) \rightarrow \min_{x \in X} (f(x) \rightarrow \max_{x \in X})$ - задача отыскания точки минимума (максимума)

функции f и ее наименьшего (наибольшего) значения на множестве X .

Введение в методологию системного моделирования и теорию оптимизации

1. Системный анализ и исследование операций – теоретическая основа для решения задач оптимизации технологических процессов в аквакультуре

Общей методологией постановки и решения задач оптимизации является системный анализ. Применительно к решению прикладных задач эта методология получила название **системного моделирования**. Центральным понятием системного моделирования является собственно понятие *системы*, под которым понимается совокупность объектов, компонентов или элементов произвольной природы, образующих некоторую целостность в том или ином контексте. Определяющим принципом рассмотрения некоторой совокупности объектов как системы является появление у нее новых свойств, которых не имеют составляющие ее элементы. Этот принцип получил специальное название — принцип *эмерджентности* (от *англ.* emergence — появление, выявление) (Леоненков, 2005).

При рассмотрении той или иной системы исходным этапом при построении ее модели является определение ее *границы*. Речь идет о необходимости разделения всех элементов на два класса: принадлежащих и не принадлежащих системе. При этом те сущности или объекты, которые собственно принадлежат системе, и будут являться ее элементами. Напротив, не принадлежащие системе объекты, но оказывающие на нее то или иное влияние, образуют *среду* или внешнюю по отношению к системе предметную область (рис. 1) (Леоненков, 2005).

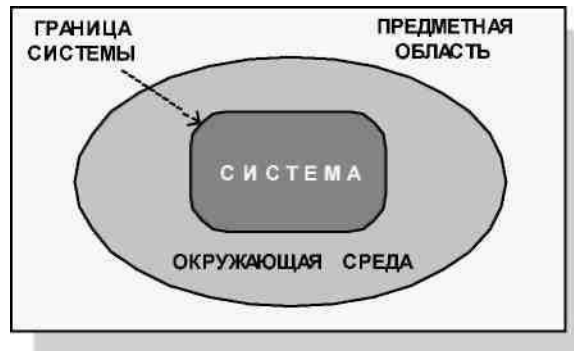


Рис. 1. Общее представление системы и окружающей среды в контексте традиционного системного анализа (Леоненков, 2005)

Важнейшими характеристиками любой системы являются ее структура и процесс функционирования. Под *структурой системы* понимают устойчивую во времени совокупность взаимосвязей между ее элементами или компонентами. Именно структура связывает воедино все элементы и препятствует распаду системы на отдельные компоненты. Структура системы может отражать самые различные взаимосвязи, в том числе и вложенность элементов одной системы в другую. В этом случае принято называть более мелкую или вложенную систему *подсистемой*, а более крупную систему — *метасистемой* (Леоненков, 2005).

Процесс функционирования тесно связан с изменением свойств системы или отдельных ее элементов во времени. При этом важной характеристикой системы является ее *состояние*, под которым понимается совокупность свойств или признаков, которые в каждый момент времени отражают наиболее существенные особенности поведения системы. Состояние системы также можно рассматривать с различных точек зрения, наиболее общей из которых является рассмотрение особенностей функционирования или эксплуатации той или иной системы (Леоненков, 2005).

Процесс функционирования системы отражает поведение системы во времени и может быть представлен как последовательное изменение ее состояний. При изменении состояния системы говорят о том, что система *переходит* из одного состояния в другое. Совокупность признаков или условий изменения состояний системы в этом случае называется *переходом*. Для системы с дискретными состояниями процесс функционирования может быть представлен в виде последовательности состояний с соответствующими переходами.

Методология системного моделирования служит концептуальной основой системно-ориентированной структуризации предметной области. В этом случае исходными компонентами концептуализации являются системы и взаимосвязи между ними. Результатом системного моделирования является построение некоторой модели системы и соответствующей предметной области, которая описывает важнейшие с точки зрения решаемой проблемы аспекты системы (Леоненков, 2005).

В общем случае под *моделью* понимается некоторое представление о системе, отражающее наиболее существенные закономерности ее структуры и процесса функционирования и зафиксированное на некотором языке или в некоторой форме. Применительно к контексту задач оптимизации имеют интерес только такие аспекты построения моделей, которые связаны с информационным или логическим моделированием систем. Общим свойством всех моделей является их подобие некоторому реальному объекту или системе-оригиналу. Важность построения моделей заключается в

возможности их использования для получения информации о свойствах структуры или поведении системы-оригинала. При этом сам процесс построения и последующего применения моделей для получения информации о системе-оригинале является основным содержанием системного моделирования. Наиболее общей информационной моделью системы является так называемая модель "черного ящика". В этом случае система представляется в виде прямоугольника, внутреннее устройство которого скрыто от системного аналитика или вообще неизвестно. Однако система не является полностью изолированной от внешней среды, поскольку последняя оказывает на систему некоторые информационные или материальные воздействия. Такие воздействия получили название *входных воздействий* или *входных параметров*, *входных переменных* (Леоненков, 2005).

Среди входных воздействий выделяют специальный класс — так называемых *управляющих воздействий (переменных)*. Последние предназначены для того, чтобы оказывать на систему целенаправленное воздействие, предназначенное для достижения системой некоторой цели (целей) или желаемого поведения. В свою очередь, система также оказывает на среду или другие системы определенные информационные или материальные воздействия, которые получили название *выходных воздействий (параметров, переменных)*. Графически данная модель может быть изображена следующим образом (рис. 1.11) (Леоненков, 2005).

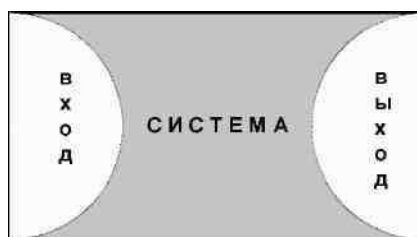


Рис. 2. Графическое изображение модели системы в виде "черного ящика" (Леоненков, 2005)

Основное назначение такой модели состоит в том, чтобы структурировать исходную информацию относительно самой системы и внешней по отношению к ней среды. Поэтому эта модель, прежде всего, фиксирует упоминавшиеся ранее границы системы. В дополнение к этому модель специфицирует воздействия, на которые реагирует система, и как проявляется эта реакция на окружающие объекты и системы. При этом, в случае количественного описания входных (выходных) воздействий, их иногда называют входными (выходными) переменными. В рамках системного моделирования разработаны определенные методологические средства, позволяющие выполнить дальнейшую структуризацию или концептуализацию этой наиболее общей модели системы (Леоненков, 2005).

В методологии системного моделирования выделяются сложные системы, исследование которых представляет наибольший интерес в контексте постановки и решения задач оптимизации. При этом *сложность* системы и, соответственно, ее модели может быть рассмотрена с различных точек зрения. Прежде всего, можно выделить сложность структуры системы, которая характеризуется большим количеством элементов и различными типами взаимосвязей между ними. Так, например, если количество элементов системы превышает некоторое пороговое значение, которое, вообще говоря, не является строго фиксированным, то такая система может быть названа сложной. Если исходные данные некоторой задачи оптимизации содержат несколько сотен переменных и ограничений, то есть все основания считать подобную задачу и соответствующую ей

систему сложной. Транспортные и энергетические системы современных мегаполисов, макроэкономика государства или отдельных отраслей также могут служить примерами сложных систем, состоящих из десятков и сотен отдельных подсистем или элементов с нетривиальной структурой взаимосвязей между ними (Леоненков, 2005).

Вторым аспектом сложности является сложность процесса функционирования системы или отдельных ее подсистем. Это может определяться как непредсказуемым характером поведения системы, так и невозможностью формального представления правил преобразования входных воздействий в выходные. Этот важный аспект сложности системы может быть связан с наличием неопределенности в описании процесса поведения системы-оригинала. В общем случае процесс постановки и решения задач оптимизации может быть представлен в форме взаимосвязанных этапов, на каждом из которых выполняются определенные действия, направленные на построение и последующее использование информационно-логических моделей систем (рис. 3). Характерной особенностью данного процесса является его циклический или итеративный характер, который отражает современные требования к анализу и проектированию сложных систем (Леоненков, 2005).

Таким образом, отдельными этапами процесса постановки и решения задач оптимизации являются:

1. Анализ проблемной ситуации.
2. Построение математической модели.
3. Анализ модели.
4. Выбор метода и средства решения.
5. Выполнение численных расчетов.
6. Анализ результатов расчетов.
7. Применение результатов расчетов.
8. Коррекция и доработка модели.

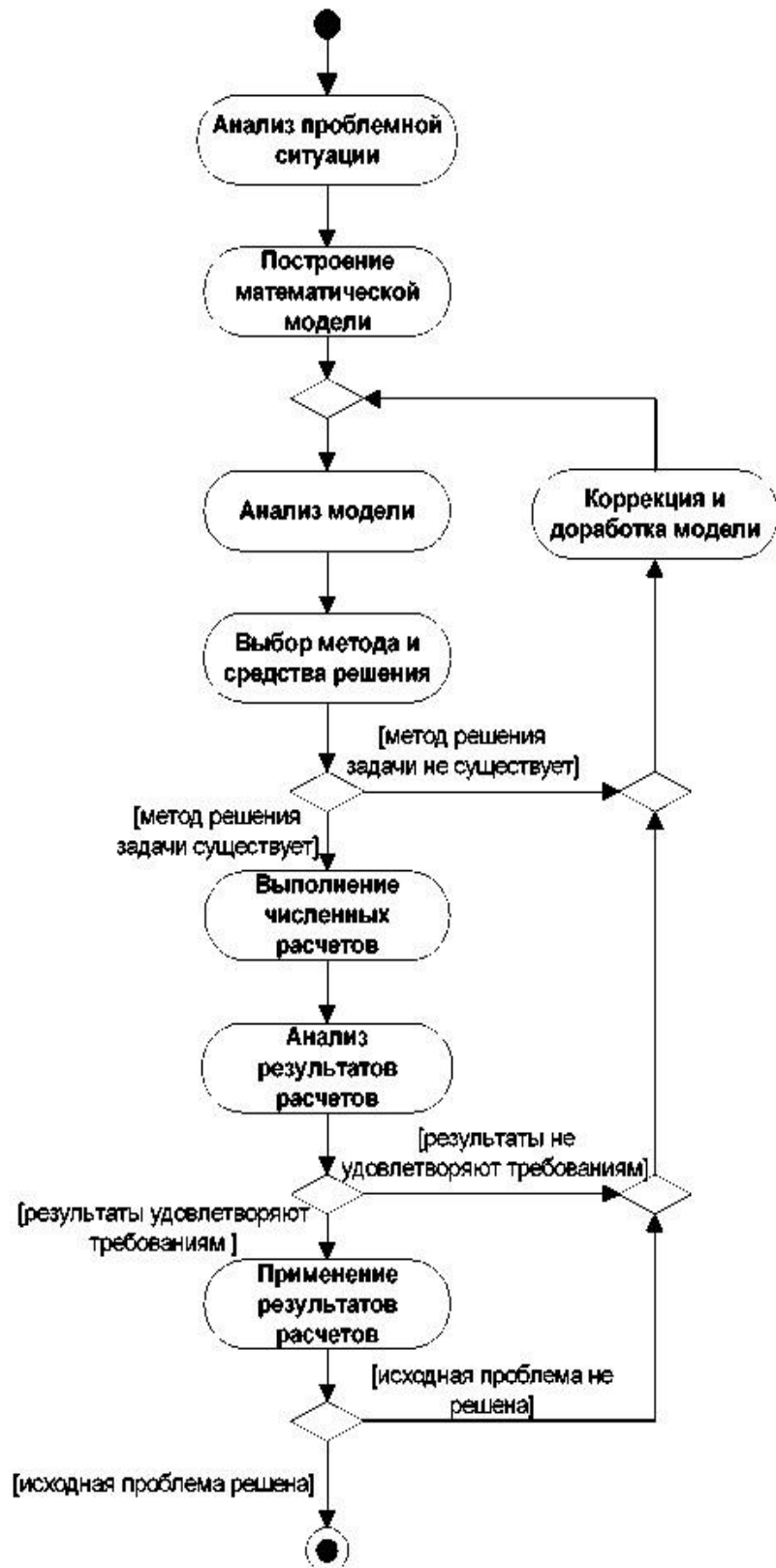


Рис. 3. Общая схема процесса постановки и решения задач оптимизации (Леоненков, 2005)

Анализ проблемной ситуации

Одним из основных принципов системного моделирования является проблемная ориентация процессов построения и использования моделей. Другими словами, та или иная

модель конкретной системы строится в контексте решения некоторой проблемы или достижения некоторой цели. Главное назначение первого этапа— логическое осмысление конкретной проблемы в контексте методологии системного моделирования. При этом выполняется анализ всех доступных ресурсов (материальных, финансовых, информационных и других), необходимых для построения модели, ее использования и реализации полученных результатов с целью решения имеющейся проблемы. На этом этапе также выполняется анализ требований, предъявляемых в той или иной форме к результату решения проблемы (Леоненков, 2005).

Первоначальный анализ решаемой проблемы и соответствующей проблемной области является наименее формализуемым с точки зрения использования известных аналитических подходов и средств. Поэтому на данном этапе рекомендуется применять так называемые *эвристические* или неформальные методы системного анализа. К ним относятся:

- методы построения логических сценариев или повествовательных историй на естественном языке для анализа возможных способов и альтернативных путей решения проблемы;
- методы мозговой атаки или штурма для генерации новых идей и нестандартных подходов к решению проблемы;
- методы морфологического и концептуального анализа для достижения требуемой полноты рассмотрения исходной проблемы;
- методы построения и анализа дерева целей и задач, которые позволяют разбить исходную проблему на ряд более частных или более простых подпроблем.

Построение математической модели

Целью данного этапа является построение адекватной модели проблемной ситуации и соответствующей проблемной области в наиболее общем контексте решения исходной проблемы. Структуризация проблемной области предполагает определение и последующее уточнение ее границ, а также установление границ и состава систем, которые потенциально могут участвовать в решении исходной проблемы. Соответствующая информация представляется в форме модели системы или проблемной области в целом на некотором формально-логическом языке (Леоненков, 2005).

При этом представляется важным, чтобы вся доступная и существенная информация о решении проблемы была зафиксирована в виде некоторой информационнологической модели системы. При этом модель должна удовлетворять принципу адекватности отражения основных особенностей системы-оригинала. Другими словами, модель не должна быть ни поверхностной или неполной, не учитывающей существенные аспекты структуры или поведения системы-оригинала; ни излишне сложной или избыточной, в рамках которой разработчики пытаются учесть даже несущественные с точки зрения исходной проблемы детали системы-оригинала (Леоненков, 2005).

Данный этап построения информационно-логической модели предполагает выполнение следующих действий:

1. Построение концептуальной или информационной модели системы и проблемной области, которая содержит наиболее общую информацию и отражает структурные взаимосвязи системы с другими объектами окружающей среды.

2. Построение аналитической или математической модели системы, которая детализирует отдельные аспекты структуры и поведения системы-оригинала в форме текста с использованием специальной математической нотации и символики.

3. Построение имитационной или программной модели системы, которая непосредственно реализует информационно-логическую модель в форме, специально предназначенной для ее исследования с использованием компьютеров (Леоненков, 2005).

Один из принципов системного моделирования заключается в том, что для построения адекватной модели сложной системы может потребоваться не одна, а несколько моделей системы-оригинала. В этом случае каждая из подобных моделей будет являться отдельным представлением сложной системы, а полная модель системы будет состоять из комплекса взаимосвязанных моделей. Этот принцип получил специальное название— принцип *многомодельности* системного моделирования. Важно, что с точки зрения системного аналитика все частные модели системы равноправны, поэтому корректно вести речь лишь об их адекватности. При этом выбор типа модели должен зависеть от характера решаемой проблемы, а не от профессиональной специализации прикладных математиков и системных аналитиков, участвующих в решении проблемы (Леоненков, 2005).

Анализ модели

В общем случае формально-логическая модель системы разрабатывается для получения некоторой новой информации о системе-оригинале с целью решения исходной проблемы. При решении задач оптимизации для этой цели строится некоторая математическая модель, анализ которой предполагает установление характерных свойств отдельных элементов этой модели. Такими элементами являются: переменные, ограничения и целевая функция модели, множество допустимых альтернатив и его математические свойства. После анализа свойств элементов математической модели оказывается возможным соотнести решаемую задачу оптимизации с одним из классов данных задач, что имеет принципиальное значение для выбора метода и средств для ее последующего решения (Леоненков, 2005).

Выбор метода и средства решения

Хотя для отдельных задач оптимизации существует решение в аналитической форме, это является скорее исключением из общего правила. Сколь-нибудь интересные практические задачи оптимизации, как правило, не имеют аналитического решения в форме расчетных формул или номограмм. Именно поэтому становится актуальным выбор вычислительного метода и программного средства для их практического решения. На выбор метода и средства оказывает влияние характер математической модели и математические свойства множества допустимых альтернатив. В первом случае класс, к которому относится рассматриваемая математическая модель, как правило, предопределяет выбор метода и алгоритма решения соответствующей задачи оптимизации. Во втором случае такая характеристика множества допустимых альтернатив, как, например, размерность исходных данных, оказывает принципиальное влияние на возможность получения точного или приближенного решения. При выполнении данного этапа может сложиться ситуация, когда для рассматриваемой задачи оптимизации не существует адекватного метода решения. Это может потребовать выполнения дополнительной коррекции и доработки модели. При наличии метода решения рассматриваемой задачи

оптимизации в сформулированной постановке для разработанной математической модели и выбранном программном средстве следует перейти к ее практическому решению в форме выполнения численных расчетов (Леоненков, 2005).

Реализация данного этапа в контексте методологии системного моделирования означает выполнение серии экспериментов с программной моделью системы на той или иной вычислительной платформе. В нашем случае, это решение конкретной задачи оптимизации для фиксированной совокупности исходных данных средствами программы электронных таблиц MS Excel. При этом возможна следующая последовательность действий, отражающая содержание собственно процесса планирования экспериментов:

1. Формирование конкретных значений исходных данных (значений коэффициентов ограничений и целевой функции) и их ввод в специальном формате на отдельный рабочий лист MS Excel.
2. Задание свойств алгоритма расчета и параметров поиска решения MS Excel.
3. Выполнение расчетов с целью получения решения в форме конкретных значений переменных модели.
4. Представление результатов расчетов в графической форме для их наглядной интерпретации.

В отдельных случаях средство поиска решения MS Excel не позволяет получить решение задачи, о чем программа сообщает пользователю. Причиной этого сообщения чаще всего являются ошибки при задании параметров поиска решения, например, неверный знак ограничений, что может привести к их несовместимости. Однако причина может быть и более сложной, связанной с особенностями встроенных вычислительных алгоритмов MS Excel (Леоненков, 2005).

Анализ результатов расчетов

Цель данного этапа заключается в анализе точности и правильности полученных результатов, если поиск решения MS Excel закончился успешно. При этом возможна следующая последовательность действий:

1. Оценка точности и верификация полученных результатов на основе проверки согласованности отдельных компонентов вычислительных расчетов с использованием аналитической модели и ручного просчета.
2. Интерпретация полученных результатов в форме управляющих воздействий или альтернатив решения исходной проблемы.
3. Оценка потенциальной возможности реализации полученных результатов применительно к системе-оригиналу.

Для удобства выполнения указанных действий результаты расчетов могут быть представлены в графическом виде в форме соответствующих диаграмм и графиков. Наличие данной возможности у программных средств также оказывают влияние на его выбор (Леоненков, 2005).

Если анализ полученных результатов показывает их недостаточную точность или потенциальную невозможность их реализации применительно к системе-оригиналу, то следует перейти к этапу коррекции и доработки модели. Если полученные результаты удовлетворяют всем предъявляемым к ним требованиям, то можно перейти к этапу их применения к системе-оригиналу для решения исходной проблемы (Леоненков, 2005).

Следует заметить, что процесс решения сложных проблем оптимизации занимает достаточно продолжительное время, в течение которого может измениться как само содержание исходной проблемы, так и наличие необходимых для ее решения ресурсов. Эти особенности зачастую не учитываются при реализации сложных проектов, что является источником их неудачного завершения. Именно для исключения или ослабления негативного влияния данных факторов на схеме процесса постановки и решения задач оптимизации должен быть предусмотрен отдельный этап — коррекция или доработка модели, который может начать выполняться с любого момента изменения исходной ситуации или в результате возникновения признаков неадекватности модели на любом из рассмотренных ранее этапов (Леоненков, 2005).

Коррекция и доработка модели

Цель данного этапа неявно была уже сформулирована ранее, а именно — внесение изменений в существующую модель, которые направлены на обеспечение ее адекватности решаемой проблеме. Речь может идти как о включении в состав или исключении из состава исходной модели дополнительных компонентов, так и о радикальном изменении структуры и содержания модели. Важно отметить проблемно-ориентированный характер этих изменений, т. е. коррекция или доработка модели должны выполняться в непосредственном контексте с решаемой проблемой (Леоненков, 2005).

Результатом выполнения этого этапа может служить упрощение исходной задачи оптимизации, например, замена нелинейных ограничений или целевой функции их линейными аналогами, а также сокращение количества переменных или ограничений модели. С другой стороны, данный этап может быть связан и с усложнением исходной модели посредством введения дополнительных переменных и ограничений для обеспечения необходимой адекватности модели решаемой проблеме (Леоненков, 2005).

При рассмотрении отдельных классов задач оптимизации приводятся также рекомендации и практические советы по выполнению этого этапа. Для правильного выполнения этапов построения и анализа математической модели следует рассмотреть определения и свойства основных элементов собственно математической модели (Леоненков, 2005).

Исследование операций

Исследование операций — это раздел современной прикладной математики, ориентированный на построение, разработку и применение математических моделей принятия оптимальных решений. Область приложений для методов исследования операций весьма обширна: это инженерно-технические, технико-экономические, социально-экономические задачи, а также задачи управления в различных сферах (Вуколов, 2013).

Методы исследования операций часто рассматривают как инструмент для принятия оптимального решения. Нахождение оптимального решения во многих практически важных задачах предполагает анализ и выбор в определенном множестве допустимых решений элемента, удовлетворяющего тому или иному критерию оптимальности. Например, это может быть выбор такого допустимого плана производства продукции, при котором предприятие получит максимальную прибыль. Здесь «допустимый план» означает план, который может быть реально выполнен с учетом всех возможностей предприятия, т.

е. с учетом ограничений на материальные, энергетические, людские и тому подобные ресурсы. В данном случае критерием оптимальности является достижение максимума целевой функции — дохода. Таким образом, рассматриваемая задача — это задача нахождения максимума целевой функции на множестве допустимых решений. Последнее определяется рядом ограничений на переменные задачи, которые задаются в виде неравенств и равенств (Вуколов, 2013).

Математические методы решения задач такого типа разработаны достаточно подробно. Это, прежде всего, методы линейного и нелинейного программирования.

В EXCEL имеется процедура «Поиск решения» (Solver), реализующая численные методы решения задач нелинейного программирования: метод Ньютона и метод сопряженных градиентов, а также симплекс-метод для решения задач линейного программирования (Вуколов, 2013). В общем случае необходимо выполнить следующие действия.

1. Ввести данные и необходимые формулы в рабочий лист Excel.
2. Вызвать процедуру **Поиск решения**.
3. Указать адрес ячейки, содержащий формулу для вычисления целевой функции и задать вид оптимизации (максимум, минимум, заданное значение).
4. Указать адреса рабочих (изменяемых) ячеек, которые будут содержать значения переменных задачи.
5. Задать ограничения, которым должны удовлетворять переменные.
6. Используя опцию **Параметры** задать численный метод для решения задачи и параметры этой процедуры.
7. Нажать кнопку **Выполнить**.

Доступ к средству **Поиск решения** осуществляется с помощью команды:

Данные→Анализ→Поиск решения.

Если в группе команд **Данные→Анализ** отсутствует команда **Поиск решения**, то необходимо загрузить соответствующую надстройку. Средство **Поиск решения** — это надстройка Excel, и ею можно воспользоваться лишь в том случае, если она загружена. Чтобы загрузить эту надстройку, необходимо выполнить такую последовательность действий.

1. Выберите команду **Файл→Параметры**.
2. В диалоговом окне **Параметры Excel** щелкните на вкладке **Надстройки**.
3. В нижней части вкладки в раскрывающемся списке **Управление** выберите опцию **Надстройки Excel** и щелкните на кнопке **Перейти**. Откроется диалоговое окно **Надстройки**.
4. В диалоговом окне **Надстройки** в списке **Доступные надстройки** установите флажок **Поиск решения** и щелкните на кнопке **ОК**.

После выполнения этих действий команда **Поиск решения** будет доступной в группе команд **Данные→Анализ** (Уокенбах, 2014).

2. Типовые постановки задач системного анализа и их связь с задачами оптимизации при разработке и совершенствовании технологических процессов

Во второй половине XX в. при решении практических задач стали находить широкое применение математические методы. Они стали использоваться при перспективном и текущем планировании научно-исследовательских работ, проектировании различных объектов, управлении технологическими и производственными процессами, прогнозировании развития социальных и производственных систем, оптимизации маршрутов перевозки грузов. Особенно часто к математическим методам прибегают при решении задач оптимизации функционирования производственных систем, при распределении материальных и трудовых ресурсов и страховых запасов, при выборе местоположения предприятий, исследовании и оценке безопасности функционирования объектов повышенного риска. Постановки перечисленных задач носят оптимизационный характер, где в качестве критериев оптимальности применяются различные целевые функции. Как уже было отмечено, особенностью постановок задач системного анализа является то обстоятельство, что наряду со строгим математическим аппаратом применяются эвристические методы, основанные на интуиции исследователя, его опыте в решении задач подобного типа. Рассмотрим некоторые постановки задач, являющиеся типовыми задачами системных исследований и имеющие существенное значение для принятия решений при планировании и управлении в рыбохозяйственной отрасли в целом и для процессов аквакультуры в частности (Антонов, 2008).

Задачи распределения ресурсов

Задачи распределения ресурсов возникают, когда существует определенный набор работ или операций, которые необходимо выполнить, а имеющихся в наличии ресурсов для выполнения каждой из них наилучшим образом не хватает. Способы распределения ограниченных ресурсов при выполнении различных операций в системе управления могут быть различными. Для того чтобы решить задачу распределения ресурсов, необходимо сформулировать некоторую систему предпочтений или решающее правило. Такое правило принятия решений по определению объема ресурсов, которые целесообразно выделить для каждого процесса, обычно разрабатывается с учетом оптимизации некоторой целевой функции при ограничениях на объем имеющихся ресурсов и временные характеристики (Антонов, 2008).

В зависимости от условий задачи распределения ресурсов делятся на три класса.

1. Заданы и работы, и ресурсы. Требуется распределить ресурсы между работами таким образом, чтобы максимизировать некоторую меру эффективности (скажем, прибыль) или минимизировать ожидаемые затраты (издержки производства). Например, предприятию установлено производственное задание в рамках оговоренного срока. Известны мощности предприятия. При изготовлении продукции изделия проходят обработку на разных станках. Естественным является ограничение - одновременно на одном станке может обрабатываться только одна единица продукции. Мощности предприятия ограничены и не позволяют для каждого изделия использовать наилучшую технологию. Требуется выбрать такие способы производства для каждой единицы продукции, чтобы выполнить задание с минимальными затратами.

2. Заданы только наличные ресурсы. Требуется определить, какой состав работ можно выполнить с учетом этих ресурсов, чтобы обеспечить максимум некоторой меры

эффективности. Приведем пример. Имеется предприятие с определенными производственными мощностями. Требуется произвести планирование ассортимента и объема выпуска продукции, которые позволили бы максимизировать доход предприятия.

3. Заданы только работы. Необходимо определить, какие ресурсы требуются для того, чтобы минимизировать суммарные издержки. Например, составлено расписание движения автобусов пригородного и междугороднего сообщения на летний период времени. Требуется определить необходимое количество водителей, кондукторов, контролеров и прочего обслуживающего персонала, чтобы выполнить план перевозок с минимальными эксплуатационными затратами (Антонов, 2008).

Задачи управления запасами

Одной из сфер практической деятельности, в которой успешно применяются методы системного анализа, является сфера управления запасами. Система управления запасами представляет особый интерес. Это объясняется, во-первых, сложностью задач, которые приходится решать в этой сфере управления, а во-вторых, общностью постановки задачи, которая находит применение в системах различного типа, например, производственных системах, предприятиях торговли и сбыта, при обосновании количества запасных изделий и т. п. Первые системы управления запасами были разработаны применительно к обоснованию необходимой потребности в запасных частях предприятий крупных компаний. Задачи управления запасами обладают одной особенностью - с увеличением запасов увеличиваются расходы, связанные с их хранением, но уменьшаются потери от возможного их дефицита. Следовательно, одна из задач управления запасами заключается в минимизации суммы ожидаемых затрат, связанных с хранением запасов, и потерь, обусловленных их отсутствием в случае необходимости (Антонов, 2008).

Основная проблема, возникающая при решении задачи управления запасами, состоит в создании эффективной и надежной системы управления. Общая система управления запасами представляет собой три уровня решения данной задачи (Антонов, 2008).

Первый уровень предусматривает обработку, ведение учета и хранение информации о запасах. Основные сведения, необходимые для успешного функционирования системы управления запасами, - это информация об уровне имеющихся запасов и запасов, которые будут созданы за счет размещения заказов, а также о заделе по заказам потребителя, если такие заказы имеются. Учет информации относительно любой имеющейся в запасах продукции включает в себя такие показатели как ее стоимость, единица измерения, источник получения, время упреждения и т. п. На первый взгляд количество различных данных о производимых или необходимых операциях невелико, однако в условиях функционирования крупных промышленных предприятий объем поступающей информации оказывается существенным. Значительно повысить эффективность обработки и хранения информации удастся путем автоматизации процесса обработки данных (Антонов, 2008).

Второй уровень рассматриваемой системы предполагает разработку Правил принятия решения, на основе которых устанавливаются срок и размер заказа, необходимого для пополнения запасов. Каждое правило принятия решений является частной задачей оптимизации управления запасами. Задачи, которые приходится решать пользователю в практических условиях, могут отличаться по своему характеру, так как конкретные системы имеют различные параметры. Поэтому необходимо знать условия, при которых

одно правило принятия решений оказывается предпочтительнее другого. С формальной точки зрения эти решения являются оптимальными, тем не менее, для успешного применения необходимо учитывать мнение соответствующих сотрудников органов управления, имеющих опыт работы и соответствующую квалификацию в данном вопросе. Следует иметь в виду, что при разработке правил принятия решений более важным является соответствующий учет реальной обстановки, чем достижение максимального показателя эффективности функционирования системы (Антонов, 2008).

Третий уровень системы позволяет на основе разработанных правил принятия решений построить модель системы управления запасами и в соответствии с этой моделью определить стратегию функционирования системы на длительную перспективу. Организация контроля за работой системы дает возможность органам управления осуществлять управление системой в целом, а не запасами конкретной продукции и в случае необходимости вмешиваться в работу системы. Правила принятия решений по восстановлению уровня первоначального запаса и сохранению уровня резервного запаса разрабатываются с помощью методов прогнозирования. Точность прогноза определяется уровнем отклонения результатов прогноза от фактических данных. Каждое правило принятия решений содержит, по крайней мере, одну управляющую переменную, значение которой обычно задается органами управления. Это делается с целью обеспечения возможности оказывать влияние на перераспределение материальных ресурсов между затратами, связанными с запасами, и эксплуатационными затратами. Для ряда систем актуальными являются вопросы разработки правил принятия решений по созданию запасов в условиях наличия ограничений на ресурсы (Антонов, 2008).

Таким образом, можно сделать вывод, что задача управления запасами есть комплексная задача, составными частями которой являются ведение информационной базы, построение моделей управления запасами, оптимизация объема создаваемого запаса и времени его пополнения и прочие вопросы (Антонов, 2008).

Организация обслуживания оборудования

К задачам организации обслуживания оборудования относятся задачи назначения времени проведения проверок исправности функционирования оборудования, проведения профилактического обслуживания, выбор оптимального числа запасных изделий и приборов для оборудования, находящегося в эксплуатации. Любое оборудование в процессе работы изнашивается, устаревает и поэтому нуждается в организации контроля за исправностью его функционирования, а также в проведении ремонтных, восстановительных работ. Под техническим обслуживанием систем понимается совокупность мероприятий, которые служат поддержанию и восстановлению рабочих свойств систем. Данные мероприятия подразделяют следующим образом:

- текущее обслуживание;
- контроль работоспособности и диагностика отказов;
- ремонтно-восстановительные работы (Антонов, 2008).

Предупредительные (регламентные) работы проводятся в системах, которые еще не утратили работоспособность, т. е. еще функционируют. Действия, необходимые для восстановления работоспособности после того, как система отказала, относятся к ремонтно-восстановительным работам. Обычно в теории систем предупредительные работы называют профилактическими, а восстановительные - аварийным восстановлением. В свою

очередь, мероприятия по ремонту, в случае, если система после его окончания по своим качествам эквивалентна новой, называют полным восстановлением (Антонов, 2008).

Характер функционирования и обслуживания систем существенно зависит от процессов, происходящих внутри системы и обуславливающих тип отказов. Различают внезапные и постепенные отказы. Внезапный отказ практически мгновенно переводит систему из работоспособного состояния в состояние отказа. О постепенных отказах говорят в тех случаях, когда удовлетворительное функционирование системы сохраняется в некоторой допустимой области определяющих параметров, которые, в свою очередь, зависят от времени. Наблюдения за вектором параметров позволяют спрогнозировать состояния работоспособности и неработоспособности системы. Если имеют место исключительно внезапные отказы, различают только работоспособное и неработоспособное состояния (Антонов, 2008).

На практике при организации функционирования систем об их состоянии можно узнать только с помощью контроля. Контрольные проверки являются неотъемлемой частью мероприятий по восстановлению работоспособности. Поскольку, с одной стороны, отказ системы приводит или может привести к экономическим потерям, а с другой стороны, контроль также сопряжен с затратами, возникает задача оптимального с точки зрения общих затрат планирования проверок. Постановка задачи в этом случае будет следующая. Определить сроки проведения контрольных проверок по обнаружению неисправностей, при которых суммарные затраты на проведение контроля и потери от простоя оборудования из-за несвоевременного обнаружения и замены вышедших из строя элементов минимизируются.

Ремонтно-восстановительные мероприятия - более масштабные по своему содержанию работы. Они связаны с проведением комплексной проверки работоспособности систем, заменой отказавших или достигших установленного ресурса элементов, регулировкой отдельных параметров и прочими работами. При планировании профилактических и восстановительных мероприятий так же, как и в задаче планирования контрольных проверок, необходимо учитывать, что несвоевременное проведение профилактических работ может привести к отказам системы и связанным с ними материальным потерям. С другой стороны, проведение профилактических работ также сопряжено с определенными материальными издержками, и поэтому их необоснованно частое проведение снижает эффективность функционирования системы. Таким образом, в данном случае также имеет место оптимизационная задача. Ее формулировка может выглядеть следующим образом: определить сроки проведения профилактических работ и замены оборудования, при которых суммарные ожидаемые затраты по ремонту и замене, а также потери, связанные с ухудшением технологических характеристик работы оборудования ввиду его старения, минимизируются на всем интервале эксплуатации системы (Антонов, 2008).

И, наконец, существует еще одна задача, относящаяся к задачам организации обслуживания систем, - обеспечение запасными частями или элементами. Она формулируется следующим образом: какое количество запасных элементов следует иметь для того, чтобы быть уверенным в том, что система с вероятностью α будет бесперебойно функционировать в течение времени t (Антонов, 2008).

Все сформулированные задачи относятся к числу оптимизационных. Однако описываемые в данном разделе задачи отличаются по постановке от задач предыдущих разделов. Дело в том, что для задач распределения ресурсов и управления запасами использовались, в основном, детерминистические модели. Для задач организации

обслуживания необходимо применять вероятностные модели, поскольку в качестве управляющего параметра в данных задачах используется наработка объектов до отказа, а это, как известно, величина случайная. Поэтому при построении моделей такого типа необходимо проводить большую работу по сбору информации о функционировании системы и ее элементов, о наработках элементов до отказа, временах восстановления их работоспособности, стратегиях обслуживания и т.д. Таким образом, задачи организации обслуживания систем являются комплексными задачами, в которых требуется организовать и вести наблюдение за эксплуатационными параметрами системы и ее элементов, осуществлять обработку информации с целью определения параметров модели, формировать модель, решать оптимизационную задачу, принимать решения и внедрять их в практику управления эксплуатацией систем. В программе эксплуатации сложной системы помимо указанных работ необходимо также предусмотреть ее взаимодействие с операторами и другими системами, участвующими в решении общих задач, учет различных режимов работы, перестройку структуры системы при возникновении нарушений, организацию ремонтов, модернизацию и продление ресурса системы (Антонов, 2008).

3. Оценка технологической схемы хозяйства аквакультуры и обоснование целесообразности его реконструкции; методы построения оптимальной технологической схемы; оценка биотехнической и экономической эффективности технологий в аквакультуре

На современном рыбоводном предприятии оценка проводимых работ (мероприятий по внедрению, модернизации, реконструкции), а также определение основных факторов, в наибольшей степени влияющих на их стоимость, производятся с применением моделирования (Богерук, 2006).

Руководители рыбоводных предприятий (хозяйств) используют математическое моделирование в своей работе, так как возрастает потребность в снижении риска производства и их минимизация. Математические модели дают возможность руководителям рыбоводных предприятий (хозяйств) использовать в своей работе для принятия управленческих решений, предвидеть ситуации при разных вариантах развития событий (Богерук, 2006).

Для разработки математических моделей главное — создание правильного алгоритма анализа. Учитывая специфику работы рыбоводного предприятия, можно выделить ряд математических моделей, которые можно применять для построения алгоритма функционирования рыбоводного предприятия при определенных условиях (Богерук, 2006).

Математические модели могут быть различны как по объектам моделирования, так и по применяемым подходам. В плане объекта наиболее значимы финансовые модели, так как они дают оценку эффективности принимаемых инвестиционных решений и могут быть использованы в процессе привлечения средств для финансирования внедрения новых биотехнологий, технологических линий и обоснования кредитоспособности предприятия (Богерук, 2006).

Из подходов в настоящий момент наиболее распространено имитационное моделирование, которое дает возможность понять влияние отраслевых тенденций, определить потенциальные риски и разработать возможные варианты их снижения. Оно помогает минимизировать степень неопределенности при распределении имеющихся ресурсов и планировании деятельности выбранного предприятия (Богерук, 2006).

Выбор технологического процесса определяется его логистическим построением.

На настоящем этапе логистического построения технологическая система в рыбоводстве состоит из четырех потоков: технологического, технического, ресурсного и организационно-экономического, которые, взаимодействуя, дополняют друг друга, но характеризуются самостоятельными методическими решениями, своими способами контроля и выполнения иных производственных функций (Богерук, 2006).

Логистика технологического процесса разведения и выращивания конкретного вида рыб требует четкой вертикальной детализации, что связано с выделением различных структурных составляющих, которые в нашем случае на современном уровне знаний установлены сверху вниз следующим образом: комплекс (технология), блок, звено, ячейка. Не исключено, что при дальнейшей детализации технологического процесса будут введены другие структурные единицы, раскрывающие особенности технологии на более низком уровне ее реализации (Богерук, 2006).

Краткая характеристика отдельных структурных единиц:

ячейка — основополагающий первичный элемент биотехнологий, являющийся составной частью звена, который может представлять собой отдельные параметры окружающей среды (температура, кислород, pH и др.) или отдельные физиологические характеристики культивируемого организма (отношение к температуре, кислороду и т.д.). Знания физиологических потребностей организма и возможностей отдельных факторов среды обитания во многом определяют эффективность разрабатываемых биотехнологий и перспективность их внедрения в производственные структуры;

звено — состоит из ячеек и является четким отражением этапности в развитии культивируемого организма. Звено отражает комплексный характер взаимодействия организма и среды обитания, который по мере роста и развития культивируемого гидробионта изменяется, особенно на начальных этапах онтогенеза; **блок** — состоит из отдельных звеньев, конечный результат по которому может быть представлен тем или иным видом товарной продукции, реализуемой на рынке (Богерук, 2006).

Рыбоводно-биологические особенности всех объектов, выращиваемых в аквакультуре, позволяют вычленировать четыре рыбоводно-производственных блока:

ремонтно-маточное стадо, в качестве товара для реализации в этом блоке может быть племенной материал, отличающийся от другой рыбоводной продукции особыми рыбоводно-биологическими параметрами и генетико-морфологическими признаками; *потомство на ранних этапах жизненного цикла*, в качестве товара для реализации могут быть рыбоводная икра и личинки; *рыбопосадочный материал*, в качестве товара для реализации может

использоваться разноразмерная молодь в возрасте от 1 до 24 месяцев; *товарное производство*, в качестве товара для реализации используется рыба коммерческих размеров (Богерук, 2006).

В зависимости от объекта культивирования количество звеньев и ячеек в каждом, отдельно взятом блоке будет различным, но характерным для каждого объекта выращивания. Продолжительность по времени отдельных блоков также будет различной, но здесь важно учитывать организационно-экономические постулаты, из которых следует, что чем короче и проще производственный цикл, тем рентабельнее производство, эффективнее хозяйственный механизм (Богерук, 2006).

Таким образом, из вышеописанного следует, что биотехнологии — это горизонтально-вертикальная многоярусная ячеистая система культивирования конкретного вида (породы) рыб с блочно-модульным принципом ее конструирования (Богерук, 2006).

Эволюция такой довольно сложной системы может происходить в двух разнонаправленных движениях: от простого к сложному и от сложного к простому с ее *оптимизацией* через:

- адаптацию организма к условиям среды обитания;
- улучшение условий среды применительно к требованиям организма;
- взаимообразное сближение требований организма и условий среды обитания;
- оптимизацию *логистического* построения с учетом различных организационноэкономических принципов (Богерук, 2006).

Наличие высокопродуктивного объекта культивирования и хорошее техническое оснащение производства не гарантирует высокую эффективность работы предприятия, если на производстве отсутствует логическая система последовательности выполнения определенных работ, нет контроля качества полуфабриката на отдельных звеньях или в отдельных блоках технологического процесса, нечетко соблюдается технологическая дисциплина (Богерук, 2006).

Логистическая система в конструировании технологических процессов культивирования рыб

Рассматривая биотехнологию как многоярусную ячеистую интегрированную систему культивирования конкретного вида (породы) рыб необходимо признать, что ее создание и функционирование является весьма сложной задачей, характерной для любого новообразования (Богерук, 2006).

Вес новообразования — результат совместных действий двух внешне противоположных процессов: дифференциации, специализации (т.е. разделения) наук и процессов; интеграции, взаимосвязи (т.е. объединения) наук и процессов, осуществление которых невозможно без использования системного анализа, базирующегося на логистических принципах (Богерук, 2006).

Исходя из общих методологических подходов логистические задачи решаются не изолированно, а в комплексе. При этом учитывается многообразие различных воздействующих факторов внешней среды — технологических, технических, экономических, правовых и организационных. Чтобы получить целостное представление о логистической системе, необходимо рассматривать ее в тесном взаимодействии и единстве с вышестоящими и нижестоящими на иерархический лестнице системами. Чтобы иметь цельное представление о системе и возможность прогнозировать ее развитие, нужно рассматривать систему в динамике и знать историю ее развития (Богерук, 2006).

Всякую систему образуют две совокупности: совокупность элементов и совокупность связей. Объективной основой интеграционных процессов является целостность объектов исследования, ибо формируется система взаимосвязанных определенными законами элементов со сложной иерархией и подчинения части целому. Единство, целостность и структурно-функциональная сложность логистической системы требуют адекватного метода, который обеспечивал бы соответствующие восприятие и исследование логистического объекта и его функционирование (Богерук, 2006).

Концепция логистики представляет собой систему взглядов на повышение эффективности функционирования биотехнологий на основе оптимизации функциональных и информационных процессов (Богерук, 2006).

Аналитические методы, столь эффективные при изучении частных процессов, уже не работают. Нужен новый, более действенный принцип, который помог бы разобраться в

логических связях между отдельными факторами. Такой принцип получил название принцип системного подхода. Объектом системных исследований являются логистические системы, представляющие множество взаимосвязанных элементов, выступающих как единое целое со всеми присущими ему внутренними и внешними связями и свойствами (Богерук, 2006).

Важная общесистемная закономерность — циклический характер функционирования логистических систем. Все логистические процессы имеют циклическую закономерность, выражающуюся в периодической повторяемости событий (Богерук, 2006).

Следующей объективной общесистемной закономерностью, во многом определяющей функционирование логистических систем, является внутрисистемная и межсистемная конвергенция. Понятие конвергенции означает взаимовлияние, взаимооближение, взаимопроникновение разных элементов или систем с высокой степенью открытости и разных открытых подсистем внутри одной системы (Богерук, 2006).

В логистических системах основные подсистемы непрерывно развиваются в пределах макроуровня (в нашем случае — комплекса, блока), и они все время становятся более совершенными. Однако неизбежно наступает момент, когда их дальнейшее развитие на макроуровне оказывается невозможным. Тогда логистическая система, сохраняя свою функцию, осуществляет принципиальную перестройку и ее составные части начинают функционировать на микроуровне (звене, ячейке). Чем сложнее логистическая система, тем более неравномерно развиваются ее составные части, что перекликается с закономерностью наименьших относительных сопротивлений или наиболее слабых мест в системе (Богерук, 2006).

Развитие всех систем идет в направлении повышения степени идеальности, т.е. идеальная логистическая система — это система, у которой ресурсные характеристики стремятся к нулю, хотя при этом способность системы выполнять свои функции не уменьшается (Богерук, 2006).

4. Классификации методов моделирования систем

Постановка любой задачи заключается в том, чтобы перевести ее словесное, или *вербальное описание в формальное*. В случае относительно простых задач такой переход осуществляется в сознании человека, который не всегда даже может объяснить, как он это сделал. Если полученная формальная модель (математическая зависимость между величинами в виде формулы, уравнения, системы уравнений) опирается на фундаментальный закон или подтверждается экспериментом, то этим доказывается ее адекватность отображаемой ситуации, и модель рекомендуется для решения задач соответствующего класса (Волкова, 2006).

По мере усложнения задач получение модели и доказательство ее адекватности усложняется. Вначале эксперимент становится дорогостоящим и опасным (например, при создании сложных технических комплексов, реализации космических программ и т. д.), а применительно к экономическим объектам — практически нереализуемым. Тогда задача переходит в класс *проблем принятия решений*, и постановка задачи, формирование модели, т.

е. перевод вербального описания в формальное, становится важной составной частью процесса принятия решения. Причем эту составную часть не всегда можно выделить как отдельный этап, завершив который, можно обращаться с полученной формальной моделью

так же, как с обычным математическим описанием, строгим и абсолютно справедливым. Большинство реальных ситуаций проектирования сложных технических комплексов и управления экономикой необходимо отображать классом самоорганизующихся систем, модели которых должны постоянно корректироваться и развиваться. При этом возможно изменение не только модели, но и метода моделирования, что часто является средством развития представления ЛПР (лиц, принимающих решения) о моделируемой ситуации (Волкова, 2006).

Иными словами, перевод вербального описания в формальное, осмысление, интерпретация модели и получаемых результатов становятся неотъемлемой частью практически каждого этапа моделирования сложной развивающейся системы. Часто для того, чтобы точнее охарактеризовать такой подход к моделированию процессов принятия решений, говорят о создании как бы «механизма» моделирования, «механизма» принятия решений (например, **«хозяйственный механизм»**, **«механизм проектирования и развития предприятия»** и т. п.) (Волкова, 2006).

Для решения проблемы перевода вербального описания в формальное в различных областях деятельности стали развиваться специальные приемы и методы. Так, возникли методы типа «мозговой атаки», «сценариев», экспертных оценок, «дерева целей» и т. п. (Волкова, 2006).

В свою очередь, развитие математики шло по пути расширения средств постановки и решения трудноформализуемых задач. Наряду с детерминированными, *аналитическими методами* классической математики возникла *теория вероятностей* и *математическая статистика* (как средство доказательства адекватности модели на основе представительной выборки и понятия вероятности правомерности использования модели и результатов моделирования). Для задач с большей степенью неопределенности инженеры стали привлекать *теорию множеств*, *математическую логику*, *математическую лингвистику*, *теорию графов*, что во многом стимулировало развитие этих направлений. Иными словами, математика стала постепенно накапливать средства работы с неопределенностью, со смыслом, который классическая математика исключала из объектов своего рассмотрения (Волкова, 2006).

Таким образом, между неформальным, образным мышлением человека и формальными моделями классической математики сложился как бы «спектр» методов, которые помогают получать и уточнять (формализовать) вербальное описание проблемной ситуации, с одной стороны, и интерпретировать формальные модели, связывать их с реальной действительностью, с другой. Этот спектр условно представлен на рис. 4а (Волкова, 2006).

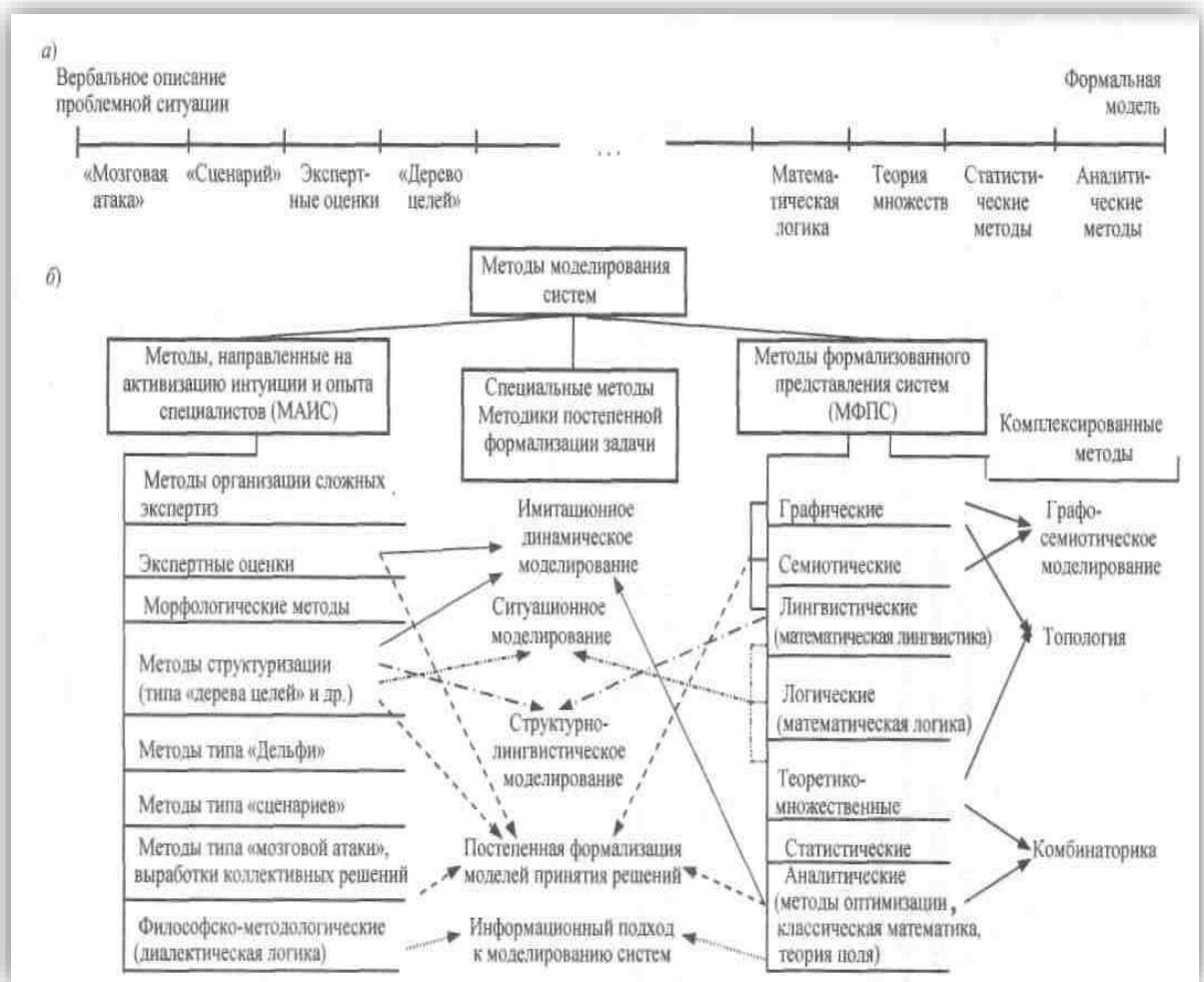


Рис. 4. а - «Спектр» методов; б - классификации двух групп методов МФПС, МАИС (Волкова, 2006)

Первоначально исследователи, развивающие теорию систем, предлагали классификации систем и старались поставить им в соответствие определенные методы моделирования, позволяющие наилучшим образом отразить особенности того или иного класса. Такой подход к выбору методов моделирования подобен подходу прикладной математики. Однако в отличие от последней, в основу которой положены классы прикладных задач, системный анализ может один и тот же объект или одну и ту же проблемную ситуацию (в зависимости от степени неопределенности и по мере познания) отображать разными классами систем и, соответственно, различными моделями, организуя, таким образом, как бы процесс постепенной формализации задачи, т. е. «выращивание» ее формальной модели. Подход помогает понять, что неверно выбранный метод моделирования может привести к неверным результатам, невозможности доказательства адекватности модели, увеличению числа итераций и затягиванию решения проблемы (Волкова, 2006).

Существует и другая точка зрения. Если последовательно менять методы приведенного на рис. 4а «спектра» (не обязательно используя все), то можно постепенно, ограничивая полноту описания проблемной ситуации (что неизбежно при формализации), но сохраняя наиболее существенные с точки зрения цели (структуры целей) компоненты и связи между ними, перейти к формальной модели (Волкова, 2006).

В то же время анализ процессов изобретательской деятельности, опыта формирования сложных моделей принятия решений показал, что практика не подчиняется такой логике, т. е. человек поступает иначе: он попеременно выбирает методы из левой и правой частей «спектра», приведенного на рис. 4а (Волкова, 2006).

Поэтому удобно как бы «переломить» этот «спектр» методов примерно в середине, где графические методы смыкаются с методами структуризации, т.е. разделить методы моделирования систем на два больших класса: *методы формализованного представления систем* (МФПС) и *методы, направленные на активизацию использования интуиции и опыта специалистов* (МАИС). Возможные классификации этих двух групп методов приведены на рис. 4б (Волкова, 2006).

Такое разделение методов находится в соответствии с основной идеей системного анализа, которая состоит в сочетании в моделях и методиках формальных и неформальных представлений, что помогает в разработке методик, выборе методов постепенной формализации отображения и анализа проблемной ситуации. Возможные варианты последовательного использования методов из групп МАИС и МФПС, показаны на рисунке сплошной и штриховой линиями (Волкова, 2006).

Отметим, что на рис. 4б в группе МАИС методы расположены снизу вверх примерно в порядке возрастания возможностей формализации, а в группе МФПС - снизу вверх возрастает внимание к содержательному анализу проблемы и появляется все больше средств для такого анализа. Такое упорядочение помогает сравнивать методы и выбирать их при формировании развивающихся моделей принятия решений, при разработке методик системного анализа (Волкова, 2006).

Классификации МАИС и особенно МФПС могут быть разными. На рис. 4б приведена классификация МФПС, предложенная Ф.Е. Темниковым (существуют и другие примеры классификаций МФПС) (Волкова, 2006).

Предлагаемые названия групп методов более предпочтительны, чем используемые иногда термины - *качественные* и *количественные* методы, поскольку, с одной стороны, методы, отнесенные к группе МАИС, могут использовать и формализованные представления (при разработке *сценариев* могут применяться статистические данные, проводиться некоторые расчеты; с формализацией связаны получение и обработка экспертных оценок, методы морфологического моделирования); а с другой стороны, в силу теоремы Гёделя о неполноте, в рамках любой формальной системы, сколь бы полной и непротиворечивой она не казалась, имеются положения (соотношения, высказывания), истинность или ложность которых нельзя доказать формальными средствами этой системы, а для преодоления неразрешимой проблемы нужно расширять формальную систему, опираясь на содержательный, качественный анализ (Волкова, 2006).

Результаты Гёделя были получены для арифметики, самого формального направления математики, и позволили предположить, что процесс логического, в том числе математического, доказательства не сводится к использованию только дедуктивного метода, что в нем всегда присутствуют неформальные элементы мышления. В дальнейшем исследования этой проблемы математиками и логиками показали, что доказательства вовсе не обладают абсолютной, не зависящей от времени строгостью и являются только культурно опосредованными средствами убеждения (Волкова, 2006).

Иными словами, строгого разделения на формальные и неформальные методы не существует. Можно говорить только о большей или меньшей степени формализованности или, напротив, большей или меньшей опоре на интуицию, «здравый смысл». Иногда

системный анализ определяют как «формализованный здравый смысл» или «здравый смысл, на службу которому поставлены математические методы» (Волкова, 2006).

Следует понимать, что любая классификация условна. Она лишь средство, помогающее ориентироваться в огромном числе разнообразных методов и моделей. Новые методы моделирования часто создаются на основе сочетания ранее существовавших классов методов (Волкова, 2006).

Так, методы, названные на рис. 4 *комплексированными* (комбинаторика, топология), начинали развиваться параллельно в рамках линейной алгебры, теории множеств, теории графов, а затем оформились в самостоятельные направления (Волкова, 2006).

Существуют также новые методы, базирующиеся на сочетании средств МАИС и МФПС. Эта группа методов представлена на рис. 4б в качестве самостоятельной группы методов моделирования, обобщенно названной *специальными методами*. Стрелками показано, какие средства МАИС и МФПС использованы при создании этих методов (Волкова, 2006).

Наибольшее распространение получили следующие специальные методы моделирования систем:

имитационное динамическое моделирование (System Dynamics Symulation Modeling) предложено Дж. Форрестером (США) в 50-х гг. XX в., использует удобный для человека структурный язык, помогающий выражать реальные взаимосвязи, отображающие в системе замкнутые контуры управления, и аналитические представления (линейные конечно-разностные уравнения), позволяющие реализовать формальное исследование полученных моделей на ЭВМ с использованием специализированного языка DYNAMO; *ситуационное моделирование*; идея предложена Д.А. Пospelовым и реализована Ю.И. Клыковым и Л.С. Загадской. Это направление базируется на отображении в памяти ЭВМ и анализе проблемных ситуаций с применением специализированного языка, разрабатываемого с помощью выразительных средств теории множеств, математической логики и теории языков; *структурно-лингвистическое моделирование*;

подход возник в 70-е гг. XX в. в инженерной практике и основан на использовании для реализации идей комбинаторики структурных представлений разного рода, с одной стороны, и средств математической лингвистики, с другой. В расширенном понимании подхода в качестве языковых (лингвистических) средств используются и другие методы дискретной математики (языки, основанные на теоретико-множественных представлениях, на использовании средств математической логики, семиотики); *теория информационного поля и информационных цепей (информационный подход к моделированию и анализу систем)*; концепция информационного поля основана на использовании для активизации интуиции ЛПР законов диалектики, а в качестве средства формализованного отображения

- аппарата математической теории поля и теории цепей; *подход, базирующийся на идее постепенной формализации моделей принятия решений путем поочередного использования средств МАИС и МФПС*; этот подход к моделированию самоорганизующихся (развивающихся) систем был первоначально предложен В.Н. Волковой на базе концепции структурно-лингвистического моделирования, но в последующем стал основой практически всех методик системного анализа (Волкова, 2006).

Классификация методов моделирования, подобная рассмотренной, помогает осознанно выбирать методы моделирования и должна входить в состав методического обеспечения работ по проектированию сложных технических комплексов, управлению предприятиями и организациями. Она может развиваться, дополняться конкретными

методами, т. е. аккумулировать опыт, накапливаемый в процессе проектирования и управления (Волкова, 2006).

5. Электронные таблицы MS Excel как средство автоматизации вычислений при решении задач оптимизации технологических процессов в аквакультуре

Как наиболее эффективно организовать работу персонала компании или определить оптимальные запасы сырья на складе— это лишь небольшая часть проблем, в которых желательно принять не просто какое-то решение, а наилучшее из всех потенциально возможных решений. Что касается истории систематического изучения задач оптимизации, то ее начало относится к эпохе зарождения математики как науки. Известно, что одними из первых математических задач, которые были сформулированы и решены античными математиками, были задачи нахождения геометрических фигур максимальной площади и тел максимального объема при ограничениях на периметр и площадь поверхности, соответственно (Леоненков, 2005).

Задачи, в которых требуется найти значения одной или нескольких переменных и при этом максимизируется или минимизируется значение некоторой непрерывной функции, занимают в математике особое место. Для их решения был разработан классический метод, связанный с нахождением нулей первой производной целевой функции и проверки их на экстремум. Этот метод, получивший название *аналитического* способа решения задач оптимизации, вполне подходит для решения простых задач. Его характерной особенностью является установление или нахождение решения в форме некоторой функциональной зависимости между исходными данными и решением (Леоненков, 2005).

Интенсивное развитие экономики и производства в XX в. привело к появлению целого ряда новых типов задач оптимизации, которые не могли быть решены классическими методами и потребовали разработки специальной математической теории — теории решения задач оптимизации. В рамках этой теории были разработаны не только методологические основы постановки и анализа задач оптимизации, но и вычислительные методы и алгоритмы их решения. Хотя по-прежнему некоторые неклассические задачи оптимизации могут быть решены аналитически, акцент исследований смещается в сторону поиска *вычислительного* способа решения для целых классов задач оптимизации (Леоненков, 2005).

Таким образом, для задач оптимизации характерно наличие нескольких возможностей для выбора альтернативных решений и наличие некоторой оценочной функции для количественного выражения наилучшего выбора. В случае отсутствия альтернатив или соответствующей оценочной функции задача оптимизации теряет свой смысл. Что касается наличия некоторых дополнительных, ограничивающих выбор условий, то последние не являются обязательным атрибутом классических задач оптимизации. Однако большинство, если не все неклассические задачи оптимизации имеют дополнительные ограничения, формирующие в своей совокупности множество допустимых альтернатив (Леоненков, 2005).

Несколько слов следует сказать о средствах решения задач оптимизации. В простейших случаях для этого может оказаться достаточным наличие ручки и листа бумаги. Для более сложных задач существуют специальные математические программы, например, MATLAB и Mathcad, которые имеют встроенные средства решения задач оптимизации. Очевидное неудобство для пользователя может быть связано с необходимостью

дополнительных затрат на их приобретение и времени на изучение их особенностей (Леоненков, 2005).

Вместе с тем в большинстве случаев для решения типовых задач оптимизации может оказать эффективную помощь программа электронных таблиц MS Excel. Использование для решения задач оптимизации других технических средств— калькулятора или логарифмической линейки— может потребовать от аналитика более серьезных усилий и квалификации. Действительно, чтобы правильно выполнить все расчетные действия с помощью этих инструментов, необходимо хорошо знать детали того или иного вычислительного алгоритма. Учитывая высокую вероятность ошибки пользователя при выполнении промежуточных расчетов, а также невысокую точность второго инструмента, оба эти средства вряд ли могут считаться базовыми при решении задач оптимизации. В то же время нельзя их полностью исключить из рабочего арсенала аналитика, поскольку они по-прежнему используются для ручной проверки правильности вычислительных алгоритмов в простейших случаях. Конечно, программа электронных таблиц MS Excel, содержащая встроенные средства для решения задач оптимизации, является далеко не универсальной. Современные задачи оптимизации настолько разнообразны по своему характеру, что разработка универсального метода или средства для их решения представляется практически невозможной. Однако существуют типовые классы задач оптимизации, которые могут быть успешно решены с помощью программы электронных таблиц MS Excel. В то же время отдельные классы интересных задач оптимизации либо не могут быть вовсе решены с помощью программы MS Excel, либо их решение связано со значительным неудобством и затратами времени. В подобных случаях исследователь оказывается в ситуации выбора. С одной стороны, обладая некоторым опытом программирования, можно воспользоваться встроенным языком VBA (Visual Basic for Applications) для написания собственных программ, реализующих те или иные алгоритмы оптимизации (Леоненков, 2005).

С другой стороны, электронные таблицы MS Excel позволяют вызывать пользовательские функции из внешних библиотек динамической компоновки (DDL), которые, в свою очередь, могут быть созданы с помощью специальных сред визуального программирования, таких как MS Visual C++.NET® (Леоненков, 2005).

Таким образом, для правильной постановки и решения практических задач оптимизации необходимо знать особенности отдельных классов этих задач и возможности программы электронных таблиц MS Excel. Далее рассматриваются примеры типовых задач оптимизации, которые послужили прообразом появления целых классов задач оптимизации и источником разработки специальных алгоритмов для их решения (Леоненков, 2005).

Методы оптимизации; решение задач оптимизации с помощью табличного процессора

6. Общая модель для задач оптимизации, классификация задач и основные подходы к решению

Математическая модель задач оптимизации

При рассмотрении процесса постановки и решения задач оптимизации ключевую роль играет понятие математической модели задач оптимизации и свойства ее основных элементов. Именно от свойств математической модели зависит возможность решения

отдельной задачи оптимизации и выбор наиболее эффективного алгоритма и способа для этой цели. Игнорирование или незнание особенностей математических моделей задач оптимизации служат источником ошибок и неудач в решении данных задач (Леоненков, 2005).

Понятие математической модели и ее основные элементы

В общем случае под *математической моделью* задачи оптимизации будем понимать специальную запись постановки и условий решения типовой задачи оптимизации с использованием понятий математики и математической символики. Применительно к конкретной задаче оптимизации математическая модель соответствует *математической постановке* данной задачи.

Как уже отмечалось ранее, при постановке задачи оптимизации должны быть определены или специфицированы следующие ее базовые компоненты:

- характеристика переменных, фиксированный набор значений которых характеризует отдельное решение задачи;
- набор ограничивающих условий, исключающих из рассмотрения отдельные решения по причине их физической или логической невозможности;
- оценочная функция, позволяющая количественно сравнивать различные решения с целью выбора наилучшего из них.

Каждый из базовых компонентов математической модели задачи оптимизации имеет свои особые свойства, которые зависят от свойств соответствующих математических объектов. Далее рассматриваются лишь основные свойства этих компонентов, используемых при общей классификации задачи оптимизации (Леоненков, 2005).

Характеристика переменных

Понятие *переменной* является одним из фундаментальных в математике, характерным свойством которой служит множество принимаемых ею значений. В зависимости от специфических свойств этого множества в задачах оптимизации используются три основных типа переменных:

- *непрерывные*, множество принимаемых значений которых имеет мощность континуума и, как правило, совпадает с множеством всех неотрицательных вещественных чисел или является его подмножеством;
- *целочисленные* или *дискретные*, множество принимаемых значений которых имеет счетную или даже конечную мощность и, как правило, совпадает с множеством всех неотрицательных целых чисел или является его подмножеством;
- *булевы*, множество принимаемых значений которых имеет всего лишь два значения: 0 и 1.

Каждая переменная должна иметь реальную интерпретацию или физический смысл в постановке задачи, а набор их значений — определять некоторое потенциальное решение исходной проблемы. При этом выбор той или иной буквы для обозначения переменной не играет принципиального значения. Фиксированный набор значений отдельных переменных задачи оптимизации называют *альтернативой* (Леоненков, 2005).

Традиционно в математике множество всех вещественных чисел обозначают через R^1 или просто R , множество всех целых чисел — через Z^1 или просто Z , множество из двух чисел: 0 и 1 — через B^1 или $\{0, 1\}$. С учетом этих обозначений требование непрерывности

переменных принято символически обозначать в виде: $x, y, z \in R^1$; требование целочисленности переменных — в виде: $x, y, z \in Z^1$; требование булевости переменных — в виде: $x, y, z \in \{0;1\}$ или, если не возникает недоразумений, $x, y, z \in B^1$ (Леоненков, 2005).

Характеристика ограничений

Большинство, если не все, практические задачи оптимизации имеют некоторый набор ограничивающих условий, которые исключают из рассмотрения отдельные решения по причине их физической или логической невозможности. Данные условия получили название *ограничений*, которые в своей совокупности определяют или специфицируют *множество допустимых альтернатив* рассматриваемой задачи оптимизации (Леоненков, 2005).

В общем случае ограничение представляет собой некоторую функциональную зависимость, которая связывает отдельные значения переменных друг с другом. В общем случае подобная функциональная зависимость записывается в виде некоторой функции, например $g(x, y, z)$, от исходных переменных задачи оптимизации. При этом предполагается, что данная функция, как правило, является непрерывной. Очевидно, что в различных задачах оптимизации может присутствовать различное число подобных функций (Леоненков, 2005).

Математическая запись ограничения дополнительно предполагает требование, что значения данной функции или функций ограничены некоторым интервалом или числом. В зависимости от знака ограничения задач оптимизации используются два основных типа ограничений:

□ *равенства*, которые символически записываются в виде: $g(x, y, z) = a$ или $g(x, y, z) = 0$;

□ *неравенства*, которые символически записываются в виде: $g(x, y, z) \leq (\geq) a$ или $g(x, y, z) \leq (\geq) 0$.

Здесь a — некоторое вещественное число, которое принимает заданное значение в контексте рассматриваемой задачи оптимизации. Саму функцию $g(x, y, z)$ в этом случае называют *правой частью* ограничения, а значение a — *левой частью* ограничения. Поскольку возможен случай, когда $a = 0$, то само значение левой части ограничения не имеет принципиального характера (Леоненков, 2005).

В зависимости от дополнительных свойств функции $g(x, y, z)$ в задачах оптимизации используются следующие основные типы ограничений.

□ *Линейные*, в которых все функции $g(x, y, z)$ является линейными относительно всех своих переменных.

□ *Нелинейные*, в которых все функции $g(x, y, z)$ является нелинейными относительно всех своих переменных. В последнем случае иногда дополнительно рассматривают следующие типы ограничений:

- *выпуклые*, в которых все функции $g(x, y, z)$ является выпуклыми относительно всех своих переменных;

- *невыпуклые*, в которых все функции $g(x, y, z)$ является невыпуклыми относительно всех своих переменных.

Набор ограничений каждой задачи оптимизации сужает исходное множество ее решений или альтернатив.

В общем случае *множество допустимых альтернатив*, удовлетворяющих всем ограничениям рассматриваемой задачи оптимизации, принято обозначать через Δ_β или

просто Δ . Математические свойства этого множества полностью определяются характером переменных и ограничений задачи оптимизации. Тот факт, что некоторый набор значений переменных удовлетворяет всей совокупности ограничений задачи, а соответствующая альтернатива принадлежит множеству допустимых альтернатив, символически записывается в виде: $x, y, z \in \Delta_\beta$ (Леоненков, 2005).

Характеристика целевой функции

Целевой или *критериальной* функцией задачи оптимизации называется некоторая оценочная функция, предназначенная для количественного сравнения альтернатив с целью выбора наилучшей. Целевая функция определяется как некоторая математическая функция, функционал или оператор, что, в общем случае, записывается в виде: $f(x, y, z)$, где $f: \Delta_\beta \rightarrow R^1$

В зависимости от свойств функции $f(x, y, z)$ в задачах оптимизации используются следующие основные типы целевых функций (Леоненков, 2005).

□ *Линейные*, в которых функция $f(x, y, z)$ является линейной относительно всех своих переменных.

□ *Нелинейные*, в которых функция $f(x, y, z)$ является нелинейной относительно всех своих переменных. В последнем случае иногда дополнительно рассматривают:

- *выпуклые (квадратичные)*, в которых функция $f(x, y, z)$ является выпуклой (соответственно, квадратичной) относительно своих переменных;
- *невыпуклые*, в которых функция $f(x, y, z)$ является невыпуклой относительно своих переменных.

В зависимости от количества целевых функций рассматриваются два основных типа задач оптимизации:

□ *однокритериальная* задача оптимизации, в математической модели которой присутствует единственная целевая функция;

□ *многокритериальная* задача оптимизации, в математической модели которой присутствует несколько целевых функций (Леоненков, 2005).

В контексте математической модели задач оптимизации требование нахождения наилучшего решения конкретизируется в требование *максимизации* или *минимизации* целевой функции. Данное требование может быть записано символически в виде: $f(x, y, z) \rightarrow \max$ или $f(x, y, z) \rightarrow \min$. При этом максимум (минимум) целевой функции находится только среди множества допустимых альтернатив. Решением задачи оптимизации является некоторый допустимый набор значений переменных, который доставляет максимальное или минимальное значение целевой функции на множестве допустимых альтернатив (Леоненков, 2005).

С учетом введенных обозначений общая математическая модель однокритериальной задачи оптимизации может быть записана символически в следующем виде:

$$f(x, y, z) \rightarrow \max_{x, y, z \in \Delta_\beta} \quad \text{или} \quad f(x, y, z) \rightarrow \min_{x, y, z \in \Delta_\beta} \quad (1)$$

$$\text{где } \Delta_\beta = \{\Delta | g_k(x, y, z) \leq (=) 0, (k \in \{1, 2, \dots, m\})\} \quad (2)$$

Здесь через Δ_β обозначено множество допустимых альтернатив, которое формируется посредством сужения исходного множества альтернатив Δ с помощью совокупности ограничений, записанных в произвольной форме: $g_k(x, y, z) \leq 0$ или $g_k(x, y, z) = 0$. В качестве исходного множества альтернатив Δ выступает одно из рассмотренных ранее множеств: множество действительных чисел R^1 , множество целых чисел Z^1 или множество из двух чисел: B^1 . Выбор этого множества определяется типом переменных,

которые используются в постановке соответствующей задачи оптимизации (Леоненков, 2005).

С учетом введенных обозначений общая математическая модель многокритериальной задачи оптимизации может быть записана символически в следующем виде:

$$f_i(x,y,z) \rightarrow \max_{x,y,z \in \Delta_\beta} \quad \text{или} \quad f_i(x,y,z) \rightarrow \min_{x,y,z \in \Delta_\beta}, \quad (\forall i \in \{1,2,...,n\}) \quad (3)$$

где $\Delta_\beta = \{\Delta | g_k(x,y,z) \leq (=) 0\}, (k \in \{1,2,...,m\})$ (4) Здесь через Δ_β также обозначено множество допустимых альтернатив, которое формируется посредством сужения исходного множества альтернатив Δ . В случае $n = 2$ соответствующие задачи оптимизации называются *двухкритериальными*, $n = 3$ — *трехкритериальными* и т. д. Натуральное число m определяет общее количество ограничений задачи оптимизации. В математических моделях типовых задач оптимизации явно указывают исходные множества альтернатив для точной спецификации типа переменных (Леоненков, 2005).

Рассмотренные свойства базовых компонентов математической модели задач оптимизации позволяют выполнить общую классификацию этих задач, знание которой необходимо для правильного анализа и выбора метода для решения конкретных задач оптимизации (Леоненков, 2005).

Классификация задач оптимизации

Построение исчерпывающей классификации задач оптимизации, которая учитывала бы все возможные модификации типовых задач и нюансы математических свойств их базовых компонентов, а также удовлетворяла математиков и системных аналитиков, практически вряд ли возможно. В то же время рассмотренных свойств базовых компонентов оказывается вполне достаточно для общей классификации задачи оптимизации, используемой для анализа и решения большинства конкретных задач, встречающихся на практике (Леоненков, 2005).

Таблица 1

Общая классификация задач оптимизации

Характеристика переменных	Характеристика ограничений	Характеристика целевой функции	Класс задач оптимизации
Непрерывные	Линейные	Одна, линейная	Линейное программирование
Непрерывные	Нелинейные или линейные	Одна, нелинейная	Нелинейное программирование
Целочисленные	Линейные	Одна, линейная	Целочисленное программирование
Целочисленные	Нелинейные или линейные	Одна, нелинейная	Целочисленное нелинейное программирование
Булевы	Линейные	Одна, линейная	Булево программирование
Булевы	Нелинейные или линейные	Одна, нелинейная	Булево нелинейное программирование
Непрерывные	Линейные	Несколько, линейные	Многокритериальное линейное программирование

Непрерывные	Нелинейные или линейные	Несколько, нелинейные	Многокритериальное нелинейное программирование
Целочисленные	Линейные	Несколько, линейные	Многокритериальное целочисленное программирование
Целочисленные	Нелинейные или линейные	Несколько, нелинейные	Многокритериальное целочисленное нелинейное программирование

Продолжение таблицы 1

Характеристика переменных	Характеристика ограничений	Характеристика целевой функции	Класс задач оптимизации
Булевы	Линейные	Несколько, линейные	Многокритериальное булево программирование
Булевы	Нелинейные или линейные	Несколько, нелинейные	Многокритериальное булево нелинейное программирование

Общая классификация задач оптимизации, основанная на рассмотрении характерных свойств базовых компонентов математической постановки данных задач, служит концептуальной основой для адекватного выбора метода решения конкретных задач того или иного класса (Леоненков, 2005).

Понятие оптимального решения задачи оптимизации

В общем случае под *оптимальным решением* однокритериальной задачи оптимизации в математической постановке (1) и (2) понимается такой набор значений переменных: $x^*, y^*, z^* \in \Delta_\beta$, которые доставляют максимум или минимум целевой функции $f(x, y, z)$ среди всех допустимых решений множества Δ_β . Другими словами, характерным признаком оптимального решения задачи оптимизации является выполнение следующего условия:

$$f(x^*, y^*, z^*) \geq f(x, y, z), \forall x, y, z \in \Delta_\beta; \quad (5) \quad f(x^*, y^*, z^*) \leq f(x, y, z), \forall x, y, z \in \Delta_\beta \quad (6).$$

При этом условие (5) должно выполняться для задач максимизации, а условие (6)— для задач минимизации. Говоря о решении той или иной задачи оптимизации, всегда понимают нахождение ее оптимального решения, которое соответствует понятию наилучшего решения в содержательной постановке (Леоненков, 2005).

Проблема существования и единственности решения задач оптимизации

В связи с анализом математической модели типовых задач оптимизации в контексте нахождения оптимального решения встает два теоретических вопроса: существования решения и его единственности (Леоненков, 2005).

Первая из проблем— проблема *существования* оптимального решения — рассматривается для типовых задач оптимизации в конкретной математической постановке. Имеется два подхода к ее решению: формальный и неформальный. *Формальный* подход предполагает использование математических теорем существования для того или иного

множества допустимых альтернатив и того или иного вида целевой функции задачи оптимизации. Главный вывод соответствующих теорем существования — *если множество допустимых альтернатив замкнуто, а целевая функция непрерывна на этом множестве, то решение соответствующей задачи оптимизации существует*. Неформальный подход к решению проблемы существования предполагает установление физической или логической осуществимости некоторых из возможных решений. Речь идет о том, что в контексте содержательной постановки задачи оптимизации выполняется эвристический анализ допустимости некоторых из решений. Если подобный анализ заканчивается успешно, то можно приступать к поиску решения задачи. В противном случае может потребоваться коррекция и доработка математической модели (Леоненков, 2005).

Вторая из проблем — проблема *единственности* оптимального решения — рассматривается в контексте вида целевых функций типовых задач оптимизации. Имеется также два подхода к ее решению: формальный и неформальный. *Формальный* подход предполагает использование математических теорем, гарантирующих единственность решения для выпуклых целевых функций выпуклых множеств допустимых альтернатив. Главный вывод соответствующих теорем — *если множество допустимых альтернатив выпукло и целевая функция на этом множестве выпукла (или вогнута), то существует единственное решение соответствующей задачи оптимизации*. К сожалению, данные условия характерны только для задач с непрерывными переменными, имеют слишком жесткий характер и не выполняются для целых классов типовых задач оптимизации (Леоненков, 2005).

Неформальный подход к решению проблемы единственности предполагает практическое нахождение нескольких допустимых решений и выбора из них наилучшего. Для этого используется один или несколько способов или методов поиска решения. Если найденные решения совпадают, то этот факт будет свидетельствовать о единственности решения. В противном случае решение может оказаться неединственным. Подобного неформального анализа единственности полученного решения для типовой задачи оптимизации также может оказаться вполне достаточно для ее корректного решения. При этом на характер получаемого решения оказывает влияние не только конкретная задача оптимизации, но и применяемый для ее решения метод или алгоритм (Леоненков, 2005).

Таким образом, следует различать два принципиально различных подхода к решению задач оптимизации:

□ *точное* решение задачи оптимизации, которое соответствует нахождению единственного или нет оптимального решения $x^*, y^*, z^* \in \Delta_\beta$, гарантирующего выполнение формальных условий (5) или (6);

□ *приближенное* решение задачи оптимизации, которое соответствует нахождению некоторого допустимого решения $x^*, y^*, z^* \in \Delta_\beta$, не гарантирующего выполнение формальных условий (5) или (6).

Говоря о приближенном решении задач оптимизации, часто условия (5) и (6) заменяют их более слабым аналогом:

$$f(x^*, y^*, z^*) \geq f(x, y, z), \forall x, y, z \in \Theta_\varepsilon; \quad (7)$$

$$f(x^*, y^*, z^*) \leq f(x, y, z), \forall x, y, z \in \Theta_\varepsilon \quad (8)$$

где через Θ_ε обозначена некоторая окрестность решения $x^*, y^*, z^* \in \Delta_\beta$, на множестве допустимых альтернатив. В этом случае решение задачи оптимизации $x^*, y^*, z^* \in \Delta_\beta$, удовлетворяющее только условию (7) — для задачи максимизации или (8) — для задачи минимизации, называют *локально-оптимальным* решением. В данном контексте решение, удовлетворяющее условиям (5) и (6), называют также *глобальнооптимальным* решением.

Не вызывает сомнения тот факт, что наиболее эффективный подход к решению задач оптимизации связан с нахождением *точного глобально-оптимального решения*. Однако на этом пути встречаются как теоретические, так и практические трудности. Теоретические трудности связаны с формальным решением проблемы существования и единственности для отдельных классов задач оптимизации, а также разработкой и наличием вычислительных алгоритмов для нахождения такого решения (Леоненков, 2005).

Практические трудности связаны с общим количеством переменных и ограничений конкретных задач оптимизации. В последнем случае при большом числе этих компонентов практически не может быть найдено точное решение отдельной задачи оптимизации за приемлемое время, даже при наличии точных вычислительных методов ее решения (Леоненков, 2005).

В случае теоретической или практической невозможности нахождения точного решения задачи оптимизации следует попытаться найти некоторое приближенное решение, которое обеспечивает значение целевой функции, близкое к глобальнооптимальному. Если и это невозможно по тем или иным причинам, то остается вариант нахождения нескольких (сколько — это отдельный вопрос) локально-оптимальных решений и выбора из них наилучшего, т. е. соответствующего максимальному или минимальному значению целевой функции. В отдельных случаях может и повезти — найденное решение может оказаться глобально-оптимальным или близким к нему (Леоненков, 2005).

В крайнем случае, ограничиваются единственным найденным локальнооптимальным решением, принимая его за окончательный результат. При этом важно понимать, что найденное решение может весьма значительно отличаться от точного глобально-оптимального решения (Леоненков, 2005).

Понятие о методах и алгоритмах решения задач оптимизации

Понятие алгоритма является одним из центральных в вычислительной и конструктивной математике. В общем случае, под *алгоритмом* понимают формальное предписание выполнить точно определенную последовательность действий, направленных на достижение заданной цели или решение поставленной задачи (Леоненков, 2005).

При рассмотрении алгоритмов выделяют три основных свойства, которым должна удовлетворять та или иная последовательность действий, чтобы быть алгоритмом:

□ *детерминированность* — характеризует точную фиксацию следующего действия после выполнения предыдущего. Другими словами, при рассмотрении алгоритмов должны быть исключены случаи неопределенности продолжения процесса выполняемых действий;

□ *массовость* — характеризует применение алгоритма для решения задач целого класса, в рамках которого он должен позволить решить любую конкретную задачу с заданными значениями исходных данных;

□ *результативность* — характеризует завершение процесса выполнения действий алгоритма за конечное число шагов или конечный интервал времени. В результате завершения процесса выполнения действий алгоритм либо должен решить поставленную задачу, либо сообщить о том, что по той или иной причине процесс решения не может быть продолжен (Леоненков, 2005).

При решении задач оптимизации выбранный или разработанный алгоритм должен позволять решать ту или иную конкретную типовую задачу оптимизации за конечное время или сообщить пользователю о невозможности ее решения. В общем случае для описания

алгоритмов используется естественный язык с элементами математической символики, который может дополняться структурной схемой алгоритма в некоторой графической нотации.

Отдельные действия алгоритма при его описании получили название *шагов* алгоритма, а их совокупность, выполняемая в рамках некоторого цикла, называется *итерацией* алгоритма. В контексте задач оптимизации рассматривается более общее и менее формальное понятие *метода* решения задачи оптимизации, под которым будем понимать некоторое обобщенное описание вычислительного процесса в форме рекомендаций по выполнению некоторых действий, также направленных на достижение заданной цели или решение поставленной задачи (Леоненков, 2005).

Таким образом, метод решения задачи оптимизации отличается от алгоритма более общим характером описания и, как следствие, является более универсальным по сравнению с последним. В то же время менее формальный способ спецификации метода позволяет говорить о его конкретизации в рамках того или иного алгоритма (Леоненков, 2005).

Для решения типовой задачи оптимизации могут быть применены различные методы и алгоритмы. Так, например, наиболее известными и получившими широкое распространение являются: метод динамического программирования и метод ветвей и границ. Они, в свою очередь, могут быть реализованы в различных вариациях, что позволяет различать соответствующие алгоритмы, ориентированные, например, на решение задач целочисленного и комбинаторного программирования (Леоненков, 2005).

В то же время для специальных классов задач, например, для задач оптимизации на графах, предложены специальные алгоритмы, такие как алгоритмы Дейкстры или Краскала, которые имеют весьма узкую область применения. В этом случае может вообще отсутствовать общий метод, от которого наследует свойства рассматриваемый алгоритм. Указанные взаимосвязи между методом и алгоритмом решения задач оптимизации могут быть изображены графически (рис. 5) (Леоненков, 2005).

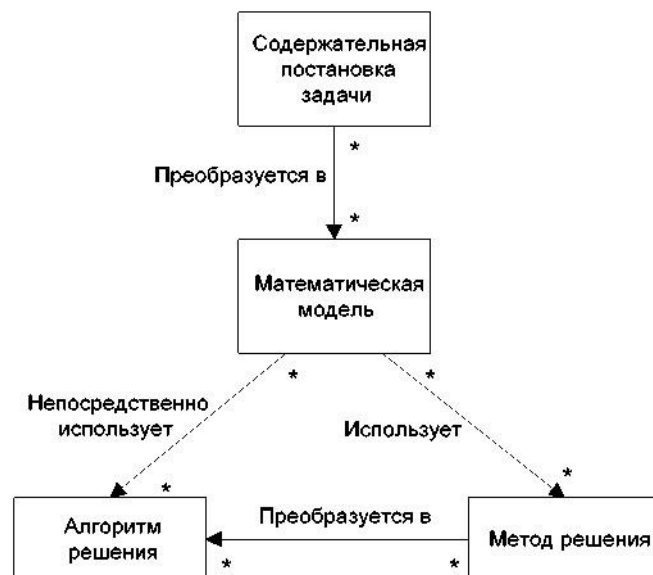


Рис. 5. Общая схема взаимосвязей методов и алгоритмов решения задач оптимизации (Леоненков, 2005)

При решении практических задач оптимизации в рамках конкретных проектов следует придерживаться некоторого шаблона, позволяющего достичь требуемого уровня унификации и систематизации, необходимого для адекватного понимания особенностей решаемой проблемы и выбора наиболее эффективных средств ее решения. Общее описание задачи оптимизации должно включать в себя следующую информацию:

- название задачи, позволяющее соотнести решаемую задачу с одним из известных классов задач оптимизации;
- содержательная постановка задачи, которая в повествовательной форме или в форме сценария описывает сущность исходной проблемы, подлежащей решению;
- математическая постановка задачи, которая представляет исходную проблему в форме математической модели. Дальнейший анализ данной модели служит основой для выбора средств ее решения;
- метод решения, который может быть использован для решения рассматриваемой задачи оптимизации применительно к разработанной математической модели;
- алгоритм решения, который может быть использован для практического решения рассматриваемой задачи оптимизации применительно к конкретному набору исходных данных;
- средство или программа решения, которые позволяют реализовать вычислительный процесс поиска оптимального решения применительно к разработанной математической модели и к конкретному набору исходных данных;
- примеры численных расчетов, иллюстрирующих правильность выбранных методов, алгоритмов и средств решения исходной проблемы (Леоненков, 2005).

Как нетрудно заметить, предложенный шаблон позволяет фиксировать информацию при выполнении отдельных этапов процесса постановки и решения задач оптимизации (см. рис. 3). При рассмотрении особенностей решения отдельных задач оптимизации весьма удобно придерживаться данного шаблона, который позволяет достичь необходимого уровня систематизации при изучении столь широкой проблематики, какой на сегодня является область задач оптимизации (Леоненков, 2005).

7. Одномерные задачи оптимизации технологических процессов в аквакультуре и их решение с помощью MS Excel

При планировании и реализации технологических процессов в аквакультуре периодически приходится определять возможности экономии различного рода ресурсов. Простейшие задачи такого рода математически в значительном числе случаев сводятся к задачам одномерной нелинейной оптимизации. В качестве одной из таких задач применительно к условиям проектирования фермерского хозяйства рассмотрим следующую.

В хозяйстве требуется изготовить резервуары - ёмкости для содержания живой рыбы относительно небольшого объема. Для изготовления приобретены заготовки прямоугольной формы из изотермического материала. Из данной заготовки необходимо сделать резервуар для транспортировки или временного содержания рыб, проектируя изготовление таким образом, чтобы получился резервуар максимального объема. Иллюстрация хода изготовления в схематическом виде изображена на рисунке.

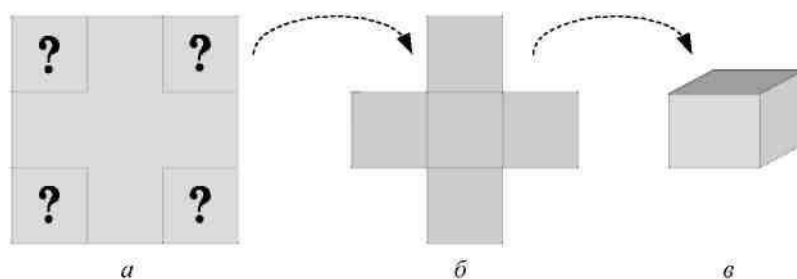


Рис. 6. Схема изготовления резервуара (Леоненков, 2005)

Оценочной функцией в данной задаче будет служить объем резервуара. Проблема же оптимизации заключается в выборе размера вырезаемых квадратов. Если размер вырезаемых квадратов будет слишком мал, то будет получен широкий резервуар малой высоты, а значит, его объем окажется невелик, а функциональность недостаточна. С другой стороны, если размер вырезаемых квадратов будет слишком большой, то будет получен узкий резервуар большой высоты, а значит, и его объем также окажется невелик (Леоненков, 2005).

В то же время на выбор размера вырезаемых квадратов оказывает влияние ограничение размера исходной заготовки. Действительно, если вырезать квадраты со стороной, равной половине стороны исходной заготовки, то задача теряет смысл. Сторона вырезаемых квадратов также не может превышать половину стороны исходной заготовки, поскольку это невозможно из практических соображений. Из этого следует, что в постановке данной задачи должны присутствовать некоторые ограничения (Леоненков, 2005).

В общем случае математическая постановка задачи нелинейного программирования с одной переменной может быть сформулирована в следующем виде:

$$f(x) \rightarrow \max_{x \in \Delta_\beta}, \text{ или } f(x) \rightarrow \min_{x \in \Delta_\beta}, \quad (9)$$

$$\text{где } \Delta_\beta = \{x | g_k(x) \leq (=) 0\}, (k \in \{1, 2, \dots, m\}) \quad (10)$$

При этом вводятся в рассмотрение некоторые общие, но принципиальные предположения о характере целевой функции и левых частей ограничений. А именно,

целевая функция $f(x)$ предполагается нелинейной, а левые части ограничений $g_k(x)$ могут быть как линейными, так и нелинейными функциями относительно единственного аргумента x . При этом сама переменная x принимает свои значения из множества действительных чисел R^1 , т.е. $x \in R^1$ (Леоненков, 2005).

В случае отсутствия ограничений (10) задача нелинейного программирования называется задачей нелинейной оптимизации *без ограничений*. В этом случае поиск решения задачи осуществляется на всем множестве задания переменной $x \in R^1$ (Леоненков, 2005).

Для математической постановки задачи о резервуаре максимального объема необходимо ввести в рассмотрение некоторые параметры, характеризующие геометрические размеры резервуара. С этой целью дополним содержательную постановку задачи соответствующими параметрами. Будем рассматривать квадратную заготовку из некоторого изотермического материала, которая имеет длину стороны L (рис. 7). Из этой заготовки следует вырезать четыре равных квадрата со стороной r по ее углам, а полученную фигуру согнуть, так чтобы получилась коробка без верхней крышки. Задача состоит в таком выборе размера вырезаемых квадратов, чтобы в результате получилась коробка максимального объема (Леоненков, 2005).

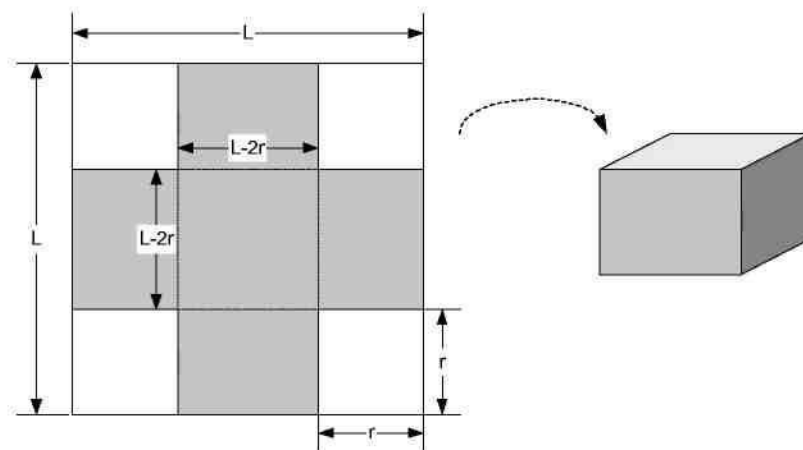


Рис. 7. Схема изготовления резервуара

Для математической постановки данной задачи необходимо определить переменные соответствующей задачи оптимизации, задать целевую функцию и специфицировать ограничения. В качестве переменной следует взять длину стороны вырезаемого квадрата r , которая в общем случае, исходя из содержательной постановки задачи, принимает непрерывные действительные значения. Целевой функцией является объем полученной коробки. Поскольку длина стороны основания коробки равна: $L - 2r$, а высота коробки равна r , то ее объем находится по формуле: $V(r) = (L - 2r)^2 \cdot r$. Исходя из физических соображений, значения переменной r не могут быть отрицательными и превышать величину половины размера исходной заготовки L , т.е. $0,5 \cdot L$ (Леоненков, 2005).

С целью унификации, обозначим переменную через $x = r$, что не оказывает влияния на характер решаемой задачи оптимизации. Тогда математическая постановка задачи о коробке максимального объема может быть записана в следующем виде:

$$f(x) = x \cdot (L - 2x)^2 \rightarrow \max_{x \in \Delta_\beta}, \text{ где } \Delta_\beta = \{x \in R^1 | 0 \leq x \leq 0,5 \cdot L\} \quad (11)$$

При значениях $r = 0$ и $r = 0,5L$ соответствующие решения задачи о коробке являются вырожденными. Действительно, в первом случае заготовка остается без изменения, а во втором случае она разрезается на 4 одинаковых части. Поскольку эти решения имеют физическую интерпретацию, задачу о коробке для удобства ее постановки и анализа можно считать задачей оптимизации с ограничениями типа *нестрогих* неравенств.

Целевая функция задачи является нелинейной, поэтому задача относится к классу задач нелинейного программирования или нелинейной оптимизации (Леоненков, 2005).

Описание основных элементов мастера поиска решения и решение задачи в программе MS Excel.

Создаем рабочую книгу с именем «Нелинейная оптимизация» и изменяем в ней имя первого листа на «Задача о проектировании резервуара». В ячейку A1 вводим текст «Переменная:», а в ячейку A2 – «Целевая функция». В ячейку B1 вводим «x=», в ячейку B2 «f(x)=». После в ячейку C2 вводится формула: $=C1*(1-2*C1)^2$, представляющая собой целевую функцию (11). По выполнении действий на листе должна отображаться информация, организованная как в таблице 2 (Леоненков, 2005).

Таблица 2

Ввод подготовительной информации в рабочую область

Переменная	x=	
Целевая функция	f(x)=	$=C1*(12*C1)^2$

Для дальнейшего решения задачи воспользуемся инструментом MS Excel под названием Поиск решения (процедура настройки и вызова была описана выше).

После вызова инструмента поиска решения появится диалоговое окно мастера задания параметров для нахождения решения (рис. 8). Ввиду важности этого инструмента следует более подробно остановиться на элементах его диалоговых окон (Леоненков, 2005).

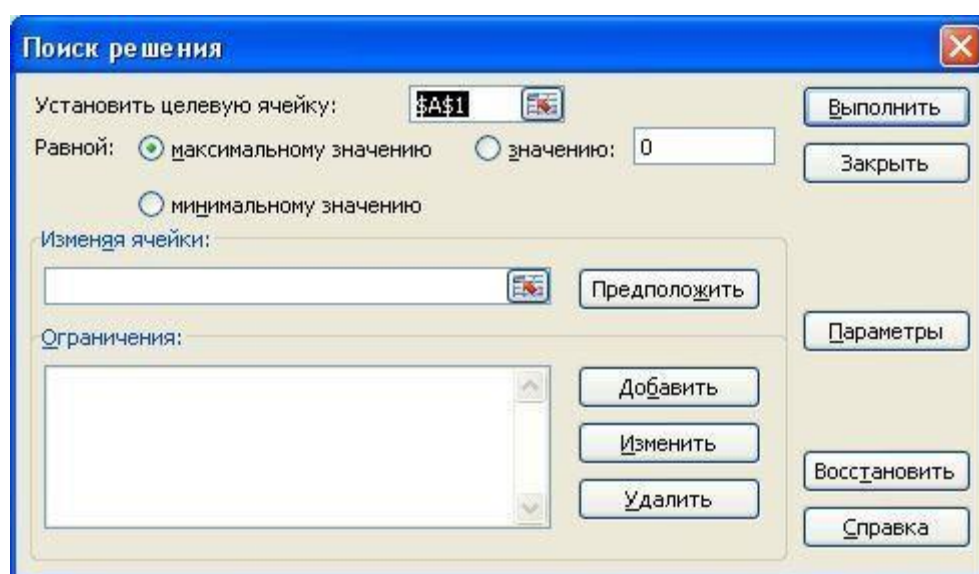


Рис. 8. Окно мастера поиска решения

Первое диалоговое окно **Поиск решения** (рис. 8) имеет следующие элементы: - поле **Установить целевую ячейку**— используется для задания ссылки на ячейку, в которой задана формула с выражением целевой функции решаемой задачи оптимизации; -

переключатели в группе **Равной** — определяют характер решаемой задачи оптимизации. Для нахождения решения с максимальным значением целевой функции этот переключатель ставится в положение **максимальному значению**, для нахождения решения с минимальным значением — в положение **минимальному значению**. Наконец, для нахождения решения, при котором целевая функция принимает некоторое фиксированное значение, переключатель ставится в положение **Значению**, справа от которого можно ввести требуемое фиксированное значение;

- поле **Изменяя ячейки** — служит для указания ячеек, которые должны изменяться в процессе поиска решения задачи. Именно в этих ячейках должны находиться переменные решаемой задачи оптимизации;
- в многострочном поле **Ограничения** отображаются ограничения решаемой задачи оптимизации. Для задания ограничений предназначено дополнительное окно **Добавление ограничения**;
- кнопка **Предположить** — служит для автоматического заполнения поля **Изменяя ячейки** теми ячейками, которые указаны в формуле задания целевой функции;
- кнопка **Добавить** — служит для вызова дополнительного окна **Добавление ограничения**

(рис. 9)

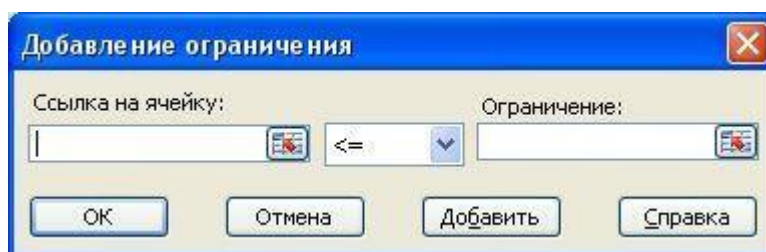


Рис. 9. Окно «Добавление ограничения» мастера Поиска решения MS Excel

- кнопка **Изменить** — служит для вызова дополнительного окна **Добавление ограничения**, в котором будет отображено ограничение, выбранное в многострочном поле **Ограничения**;
- кнопка **Удалить** — служит для удаления ограничения, выбранного в многострочном поле **Ограничения**;
- кнопка **Выполнить** — служит для запуска процесса нахождения оптимального решения после спецификации всех параметров поиска решения;
- кнопка **Закрыть** — служит для закрытия диалогового окна **Поиск решения**;
- кнопка **Параметры** — служит для вызова дополнительного окна **Параметры поиска решения** (рис. 10) для спецификации дополнительных параметров поиска решения, часть которых уже задана по умолчанию;

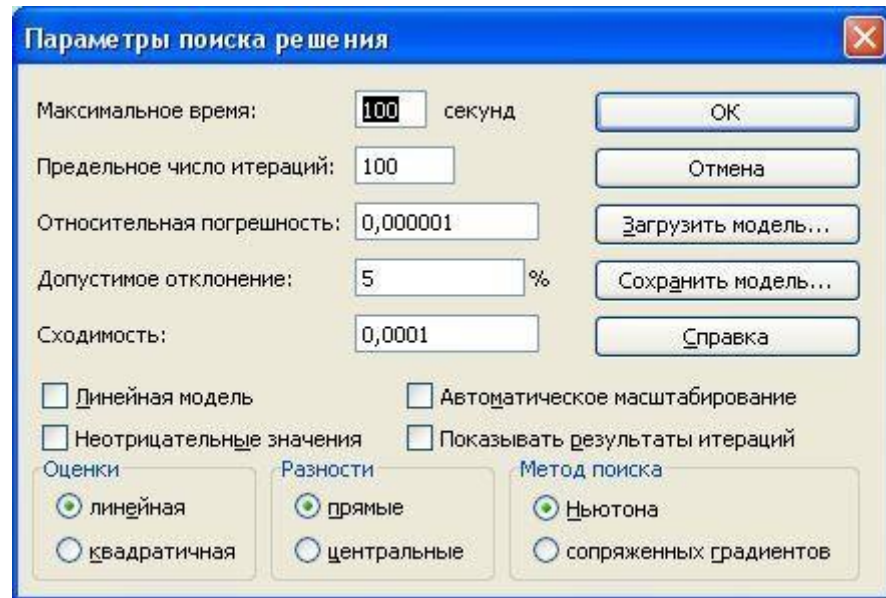


Рис. 10. Окно «Параметры Поиска решения» мастера Поиска решения MS Excel

- кнопка **Восстановить** — служит для очистки полей данного диалогового окна и восстановления значений параметров поиска решения, используемых по умолчанию;
- кнопка **Справка** — служит для получения справочной информации об элементах диалогового окна **Поиск решения** (Леоненков, 2005).

Диалоговое окно **Добавление ограничения** (рис. 9) предназначено для задания одного ограничения и имеет следующие элементы:

- поле **Ссылка на ячейку** — служит для указания ячейки или диапазона ячеек, в которых содержится левая часть задаваемого ограничения;
- выпадающий список в центре окна — содержит перечень знаков неравенств ограничений, а также возможность спецификации требования целочисленности или двоичных значений переменных. Мастер поиска решений допускает спецификацию ограничений в виде равенств и неравенств;
- поле **Ограничение** — служит для указания ячейки, диапазона ячеек или конкретного числа, которое специфицирует правую часть задаваемого ограничения;
- кнопка **ОК** — служит для добавления ограничения к параметрам поиска решения и закрытия окна **Добавление ограничения**; кнопка **Отмена** — для закрытия окна **Добавление ограничения** без добавления ограничения к параметрам поиска решения.
- кнопка **Добавить** — для добавления ограничения к параметрам поиска решения без закрытия окна **Добавление ограничения**;
- кнопка **Справка** — служит для получения справочной информации об элементах диалогового окна **Добавление ограничения**.

Диалоговое окно **Параметры поиска решения** (рис. 10) предназначено для спецификации дополнительных параметров нахождения решения или изменения уже заданных параметров. Следует заметить, что значения большинства этих параметров, используемых по умолчанию, подходят для решения типовых задач оптимизации. Диалоговое окно **Параметры поиска решения** имеет следующие элементы (Леоненков, 2005).

- Поле **Максимальное время** служит для ограничения времени, отпускаемого на поиск решения задачи. В это поле можно ввести время (в секундах). Установленное по умолчанию значение 100 подходит для решения рассматриваемых типовых задач.

- Поле **Предельное число итераций** служит для ограничения времени решения задачи посредством задания некоторого предельного числа промежуточных вычислений. Установленное по умолчанию значение 100 подходит для решения рассматриваемых типовых задач.

- Поля **Относительная погрешность** и **Допустимое отклонение** служат для задания точности, с которой будет выполняться поиск решения. В отдельных случаях целесообразно после нахождения решения со значениями этих параметров, заданными по умолчанию, повторить вычисления с большей точностью и меньшим допустимым отклонением. После выполнения поиска решения сравнить полученные результаты.

- Флажок **Линейная модель** служит для ускорения поиска решения задачи оптимизации с линейной целевой функцией и линейными ограничениями. Для задач нелинейной оптимизации этот флажок должен быть сброшен, а для задач линейного программирования — установлен, поскольку в противном случае возможно получение неверного результата

- Флажок **Показывать результаты итераций** служит для приостановки поиска решения для просмотра результатов отдельных итераций.

- Флажок **Автоматическое масштабирование** служит для включения автоматической нормализации входных и выходных значений, качественно различающихся по величине, — например, максимизация прибыли в процентах по отношению к вложениям, исчисляемым в миллионах рублей.

Флажок **Неотрицательные значения** позволяет установить нулевую нижнюю границу для тех влияющих ячеек, для которых она не была указана в поле **Ограничение** диалогового окна **Добавить ограничение** (Леоненков, 2005).

- Параметры группы **Оценки** служат для указания метода экстраполяции (линейная или квадратичная), используемого для получения исходных оценок значений переменных в каждом одномерном поиске. При этом:

- переключатель **линейная** служит для использования линейной экстраполяции вдоль касательного вектора, которая дает лучшие результаты при решении линейных задач;

- переключатель **квадратичная** служит для использования квадратичной экстраполяции, которая дает лучшие результаты при решении нелинейных задач.

- Параметры группы **Разности** служат для указания метода численного дифференцирования (прямые или центральные производные), который используется для вычисления частных производных целевых и ограничивающих функций. При этом:

- переключатель **прямые** используется в большинстве задач, где скорость изменения ограничений относительно невысока;

- переключатель **центральные** используется для функций, имеющих разрывную производную. Данный способ требует больше вычислений, однако его применение может быть оправданным, если выдается сообщение о том, что получить более точное решение не удастся.

- Параметры группы **Метод поиска** служат для выбора алгоритма оптимизации (метод Ньютона или сопряженных градиентов) для указания направления поиска. При этом:

- переключатель **Ньютона** обеспечивает выбор для нахождения решения квазиньютоновского метода, который требует больше памяти, но выполняется за меньшее число итераций, чем в методе сопряженных градиентов;
 - переключатель **сопряженных градиентов** обеспечивает выбор для нахождения решения метода сопряженных градиентов, который требует меньше памяти, но выполняется за большее число итераций, чем в методе Ньютона. Данный метод следует использовать, если задача достаточно велика, и необходимо экономить память, а также, если итерации дают слишком малое отличие в последовательных приближениях.
- Кнопка **ОК** служит для добавления дополнительных параметров и закрытия окна **Параметры поиска решения**.
 - Кнопка **Отмена** для закрытия окна **Параметры поиска решения** без изменения дополнительных параметров поиска решения.
 - Кнопка **Загрузить модель** служит для вызова диалогового окна **Загрузить модель**, в котором можно задать ссылку на область ячеек, содержащих загружаемую модель.
 - Кнопка **Сохранить модель** служит для вызова диалогового окна **Сохранить модель**, в котором можно задать ссылку на область ячеек, предназначенную для хранения модели оптимизации. Данный вариант предусмотрен для хранения на листе более одной модели оптимизации, при этом первая модель сохраняется автоматически.
 - Кнопка **Справка** служит для получения справочной информации об элементах диалогового окна **Параметры поиска решения** (Леоненков, 2005).

Продолжим решение задачи о резервуаре максимального объема. В первом окне мастера поиска решения следует в поле с именем **Установить целевую ячейку** указать ячейку $\$C\2 , в которой содержится формула для расчета целевой функции задачи, а в поле с именем **Изменяя ячейки** ввести абсолютный адрес ячейки $\$C\1 , в которую будет записано искомое решение задачи (Леоненков, 2005).

После этого следует добавить два ограничения на допустимые значения переменной (рис. 11). Для этого следует нажать кнопку **Добавить**, в результате чего появится дополнительное окно задания ограничений. Для ввода адресов ячеек в левую часть ограничения предназначено поле с именем **Ссылка на ячейку**. Форма неравенства ограничения выбирается из вложенного списка в средней части окна. Наконец, для задания правой части ограничений в поле ввода с именем **Ограничение** следует ввести с клавиатуры следующие числа: 0,5 — для первого ограничения и 0 — для второго. После спецификации каждого из ограничений их необходимо включить в модель расчета, для чего следует нажать кнопку **Добавить** или **ОК**. Для того чтобы закрыть дополнительное окно задания ограничений и вернуться в исходное окно мастера поиска решения, следует нажать кнопку **Отмена** или **ОК** (Леоненков, 2005).

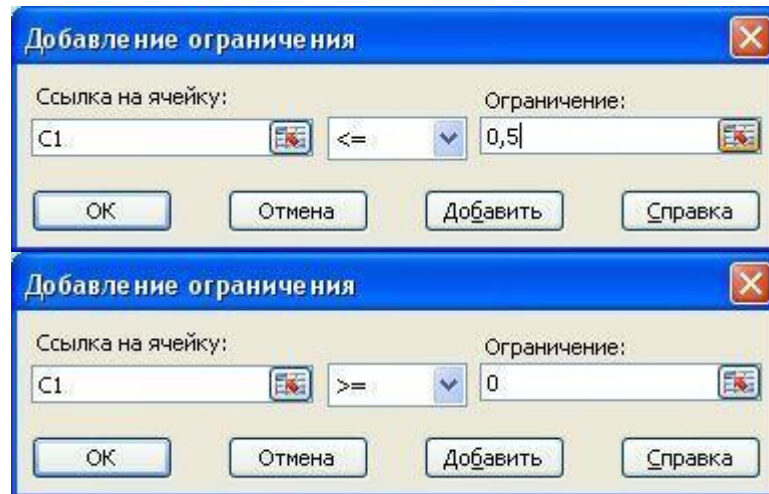


Рис. 11. Ограничения модели

Остальные параметры мастера поиска решения, для редактирования которых предназначено дополнительное второе окно этого мастера, можно оставить без изменения. Окончательный внешний вид диалогового окна мастера поиска решения после задания необходимой информации изображен на рис. 12 (Леоненков, 2005).

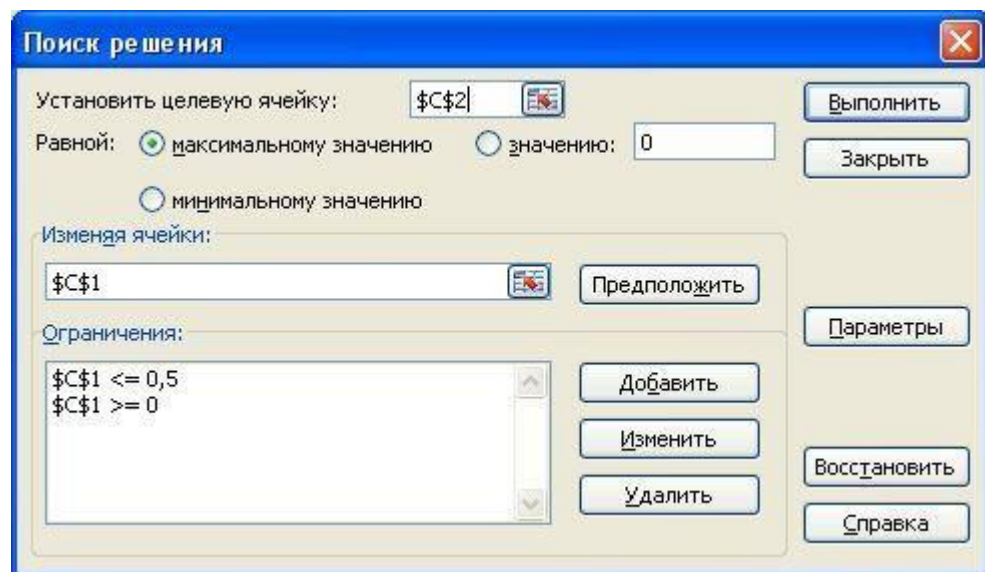


Рис. 12. Параметры мастера Поиска решения для задачи о резервуаре

Для редактирования некоторого ограничения его следует выделить в многострочном поле с именем **Ограничения** и нажать кнопку с именем **Изменить**. В этом случае появится дополнительное окно, в котором можно выполнить необходимые действия по редактированию выбранного ограничения (Леоненков, 2005).

После задания необходимых параметров поиска решения можно приступить к выполнению численных расчетов, для чего следует нажать кнопку **Выполнить**. После выполнения численных расчетов программой MS Excel практически мгновенно будет получено количественное решение, которое имеет следующий вид (таблица 3) (Леоненков, 2005).

Таблица 3

Результат количественного решения задачи о резервуаре

Переменная	=	0,166667
Целевая функция	(x)=	0,074074

Интерпретируя полученные количественные значения, можно прийти к следующему заключению. Результатом решения является оптимальное значение стороны вырезаемого квадрата:

$r_{opt} = 0,166\ 666\ 693\ 970\ 235$, при котором изготовленная коробка будет иметь максимальный объем: $V_{max} = 0,074\ 074\ 074\ 074\ 073$.

Напомним, что это решение соответствует длине стороны исходной заготовки, равной 1.

Полученное решение имеет общий характер, поскольку в любом конкретном случае для получения решения рассматриваемой задачи оптимизации значение L следует умножить на найденное значение r_{opt} . Например, если $L = 2$ м, то для получения коробки максимального объема следует вырезать по углам исходной заготовки квадраты со стороной:

$$0,166\ 666\ 693\ 970\ 235 * 2 = 0,333\ 333\ 387\ 940\ 470\ \text{м.}$$

Таким образом, задача о коробке максимального объема в каждом конкретном случае может быть решена простой подстановкой в расчетную формулу:

$$r_{opt} = 0,166\ 666\ 693\ 970\ 235 * Z \text{ конкретного значения величины } L.$$

Допустимая точность решения задается в каждом конкретном случае, исходя из специфики задачи и соответствующей проблемной области (Леоненков, 2005).

Для анализа найденного решения можно построить график целевой функции (11) и визуально оценить его корректность. С этой целью на отдельном рабочем листе с помощью операции автозаполнения ячеек зададим последовательный ряд чисел исходной переменной r в диапазоне от 0 до 1 с интервалом 0,01, которые запишем в ячейки с адресами **A2:A52**. Рядом в ячейки **B2:B52** запишем соответствующие значения целевой функции (11). Для этого можно записать формулу: $=A2 * (1 - 2 * A2)^2$ в ячейку **B2** и с помощью операции автозаполнения "протянуть" содержание этой ячейки на диапазон **B3:B52**.

После этого для построения графика целевой функции для задачи о коробке следует воспользоваться мастером диаграмм. Построенный график целевой функции будет иметь следующий вид (рис. 13).

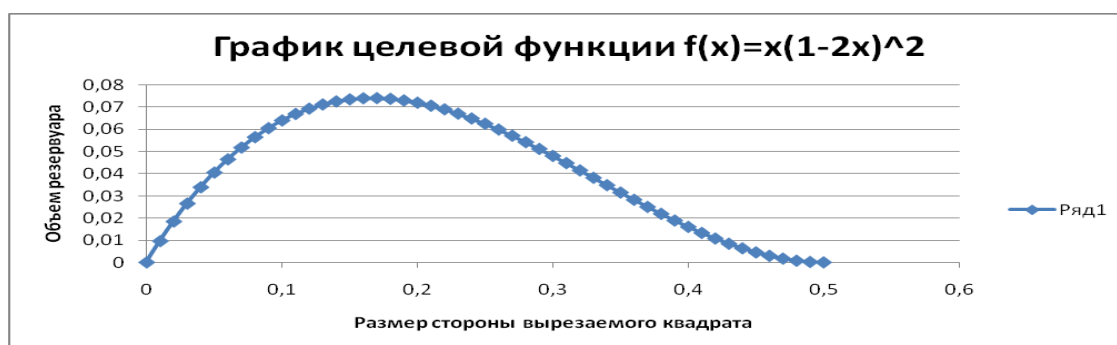


Рис. 13. График целевой функции

Визуальный анализ этого графика показывает, что максимум целевой функции находится между значениями $x = 0,16$ и $x = 0,17$. Этот факт можно также проверить, сравнив

значения в ячейках **B18** и **B19**. Тем самым, можно сделать вывод о корректности полученного результата решения данной задачи оптимизации (Леоненков, 2005).

Аналитическое решение задачи о резервуаре

Поскольку задача о резервуаре максимального объема имеет достаточно простое аналитическое решение, проведем необходимые вычисления для дополнительной проверки правильности численных расчетов программы MS Excel.

Прежде всего, следует заметить, что целевая функция (11) является непрерывной и дифференцируемой на всем интервале ее задания, включая множество допустимых альтернатив Δ_r , которое, в свою очередь, является замкнутым. Как следует из курса математического анализа, непрерывная функция на замкнутом множестве достигает своих экстремальных значений, из которых нас интересуют точки максимума данной функции. Для нахождения экстремума аналитическим способом следует определить первую производную целевой функции и отыскать ее корни (Леоненков, 2005). Первая производная функции: $f(x) = x * (1 - 2x)^2$ равна: $\frac{df}{dx}(x) = 12x^2 - 8x + 1$

Соответствующее уравнение: $12x^2 - 8x + 1 = 0$ является квадратным, которое имеет два корня: $x_1 = 1/6$ и $x_2 = 1/2$. Анализ графика целевой функции (см. рис. 13) показывает, что максимальному значению этой функции соответствует первый корень. Данное значение является допустимым и служит точным аналитическим решением задачи оптимизации о резервуаре максимального размера. Таким образом, $r_{opt} = 1/6$. Поскольку число $1/6$ является иррациональным и представляет собой периодическую дробь $0,1\bar{6}$ (6), при желании можно получить его любое приближение произвольной точности (Леоненков, 2005).

Задача для студентов.

В хозяйстве имеются брезентовые заготовки в форме круга, вырезав сектор из которых, можно соединить края разреза и получить конический чехол. Нужно выбрать размер вырезаемого сектора таким образом, чтобы чехол был максимального объема. Необходимо решить данную задачу с помощью мастера поиска решения MS Excel. Попробуйте также проверить найденное программой решение с помощью методов аналитического моделирования.

8. Линейное программирование как наиболее широко применяемая методология для решения производственных задач оптимизации.

Общая характеристика и математическая постановка задач

К классу задач линейного программирования относятся такие задачи однокритериальной оптимизации, в которых переменные являются непрерывными и неотрицательными, целевая функция является линейной функцией своих аргументов, а ограничения могут быть представлены в форме линейных неравенств и равенств. При этом на значения переменных не накладываются никакие дополнительные ограничения, такие как, например, ограничения целочисленности или булевости (Леоненков, 2005).

На формирование линейного программирования в качестве самостоятельного направления научно-прикладных исследований наибольшее влияние оказали американские

ученые Дж. Данциг, Т. Купманс, Дж. фон Нейман и ученые из России Л. В. Канторович, А. С. Немировский, Л. Г. Хачиян и Д. Б. Юдин. Хотя необходимость создания специальных методов решения неклассических оптимизационных задач осознавалась и раньше, в частности, экономистами и военными специалистами во время второй мировой войны, только в послевоенное время были разработаны теоретические основы линейного программирования и предложены специальные методы решения соответствующих практических задач (Леоненков, 2005).

Собственно термин "линейное программирование" впервые появился в 1951 г. в работах Дж. Данцига и лауреата Нобелевской премии по экономике Т. Купманса. Однако общепризнано, что первые исследования по линейному программированию, связанные с формулировкой основной задачи, рассмотрением приложений, нахождением критерия оптимальности, экономической интерпретацией, были выполнены в конце 30-х годов XX в. в СССР лауреатом Нобелевской премии по экономике Л. В. Канторовичем. По этому поводу Дж. Данциг в одной из своих монографий отмечает, что "Канторовича Л. В. следует признать первым, кто обнаружил, что широкий класс важнейших производственных задач поддается четкой математической формулировке, которая, по его убеждению, дает возможность подходить к задачам с количественной стороны и решать их численными методами...»

Достижения в области линейного программирования содействовали прогрессу в разработке методов и алгоритмов решения задач оптимизации других классов, в том числе задач нелинейного, целочисленного и комбинаторного программирования (Леоненков, 2005).

Общая характеристика задачи линейного программирования

При рассмотрении задач линейного программирования, следует помнить, что, с одной стороны, они являются специальным случаем общей задачи оптимизации. Тем самым для задач линейного программирования оказываются справедливыми соответствующие результаты относительно общих свойств и способов их решения, разработанные в теории решения экстремальных задач. С другой стороны, специальная форма задания целевой функции и ограничений в форме линейных функций приводит к появлению у данного класса задач целого ряда специальных свойств, которые послужили основой разработки специализированных методов и алгоритмов их решения. Для детального анализа этих специальных свойств следует рассмотреть общую математическую постановку задачи линейного программирования (Леоненков, 2005).

Математическая постановка задачи линейного программирования

В общем случае математическая постановка задачи линейного программирования может быть сформулирована в следующем виде:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max_{x \in \Delta_\beta}, \text{ где (12)}$$

$$\Delta_\beta = \{\Delta | g_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq (=) b_k; x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0\}; \text{ (13) } (k \in \{1, 2, \dots, m\}).$$

При этом следует принимать во внимание следующие принципиальные предположения о характере целевой функции и левых частей ограничений:

1. Целевая функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ предполагается линейной относительно всех своих переменных, т. е. может быть представлена в форме: $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$
2. Левые части ограничений $g_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($\forall k \in \{1, 2, \dots, m\}$) также являются линейными функциями относительно своих переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, т.е. могут быть представлены в форме: $g_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n$.
3. Переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ могут принимать свои значения только из множества неотрицательных действительных чисел R_+^1 , т. е. $x_i \in R_+^1$ ($\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$) (Леоненков, 2005).

С учетом сделанных предположений *общая задача линейного программирования* может быть сформулирована следующим образом.

Необходимо найти максимум линейной целевой функции n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n \in R_+^1$ следующего вида: $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max$ (14)

$$x \in \Delta_\beta$$

где множество допустимых альтернатив Δ_β формируется следующей системой ограничений типа равенств и неравенств:

$$\{ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \quad (\forall i \in \{1, 2, \dots, q\}) \quad (15)$$

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \leq b_k \quad (\forall k \in \{q+1, \dots, m\})$$

В математической постановке общей задачи линейного программирования через c_i, a_{ki}, b_k обозначены постоянные величины, которые могут принимать произвольные, не обязательно целочисленные значения, определяемые спецификой конкретной задачи линейного программирования (Леоненков, 2005).

Задача минимизации линейной целевой функции при ограничениях типа равенств и неравенств может быть сведена к общей задаче линейного программирования вида (14) и (15), поскольку $f(x) \rightarrow \min$ эквивалентно $-f(x) \rightarrow \max$. Именно поэтому, не ограничивая общности, в последующем, говоря о задачах линейного программирования, будем иметь в виду задачи максимизации линейных функций типа (14) и (15) (Леоненков, 2005).

В случае отсутствия ограничений типа равенств (15), т. е. при $q = 0$, задача линейного программирования называется *стандартной задачей линейного программирования*, которая, с учетом сделанных предположений, может быть записана в следующем виде:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max \quad (16)$$

$$x \in \Delta_\beta$$

где множество допустимых альтернатив Δ_β формируется следующей системой ограничений типа неравенств:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$\{ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \quad (17)$$

...

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \text{ и}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

С другой стороны, при отсутствии ограничений типа неравенств (15), т.е. при $q = m$, задача линейного программирования называется *канонической* или *основной задачей линейного программирования*, которая, с учетом сделанных предположений, может быть записана в следующем виде:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max \quad (18)$$

$$x \in \Delta_\beta$$

где множество допустимых альтернатив Δ_β формируется следующей системой ограничений типа равенств:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \{ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \} (19) \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \\ x_1, x_2, \dots, x_n &\geq 0 \end{aligned}$$

Следует заметить, что стандартная задача линейного программирования (16) и (17) посредством введения дополнительных переменных может быть сведена к канонической задаче линейного программирования (18) и (19) и наоборот. Эти два типа задач отличаются только особенностью своей формулировки, которая, в свою очередь, определяется соображениями удобства формального анализа методов их решения (Леоненков, 2005).

При рассмотрении общих особенностей задачи линейного программирования удобной оказывается стандартная форма математической постановки задачи линейного программирования (16) и (17). Анализ множества допустимых альтернатив Δ_β стандартной задачи линейного программирования (16) и (17) позволяет прийти к выводу о справедливости только одной из трех возможных ситуаций:

1. Система ограничений (17) противоречива или несовместна, т. е. не существует ни одного набора значений $x_1, x_2, \dots, x_n$ которые удовлетворяют ограничениям (17). В этом случае задача линейного программирования не имеет решения.
2. Система ограничений (17) не является противоречивой, однако соответствующая ей область пространства R^n является неограниченной. В этом случае задача линейного программирования не имеет решения, в случае, если линейная функция (16) не ограничена в неограниченной области, соответствующей множеству допустимых альтернатив Δ_β .
3. Система ограничений (17) не является противоречивой, и при этом соответствующая ей область пространства R^n является ограниченной. В этом случае задача линейного программирования имеет решение.

В последней ситуации задача линейного программирования может иметь либо единственное решение, либо континуум решений. Континуум решений имеет место в том случае, когда линейная целевая функция оказывается параллельной функции левой части одного из ограничений (Леоненков, 2005).

Основные методы решения задач линейного программирования

В общем случае существует два подхода к решению задач оптимизации. С одной стороны, для решения задачи линейного программирования теоретически может быть использован некоторый аналитический способ решения, применимый для решения задач оптимизации в общей постановке (Леоненков, 2005).

Однако использование для решения задач линейного программирования аналитического способа решения, основанного, например, на методе множителей Лагранжа, с учетом дифференцируемости целевой функции и ограничений, связано с преодолением серьезных трудностей вычислительного характера. В этом случае, даже для небольшого числа переменных и ограничений, решение задачи линейного программирования сводится к нахождению частных производных функции Лагранжа с последующим решением системы уравнений с большим числом переменных. Именно по

этой причине аналитический способ решения задач линейного программирования не используется на практике (Леоненков, 2005).

С другой стороны, для решения задачи линейного программирования могут быть использованы алгоритмические методы решения, применимые для решения задач оптимизации в общей постановке. Эти методы основываются на идее градиентного поиска для задач оптимизации с ограничениями (Леоненков, 2005).

Однако наибольшее применение для задач линейного программирования получили алгоритмические способы решения соответствующих задач, которые учитывают специфические особенности целевой функции и множества допустимых решений. Из алгоритмических способов следует отметить получивший широкую известность *симплексметод* для решения задач линейного программирования и *метод потенциалов* для решения транспортной задачи (Леоненков, 2005).

Кроме аналитического и алгоритмического подходов к решению задач оптимизации, простейшие задачи линейного программирования могут быть решены *графическим способом*, который основан на изображении графиков целевой функции и ограничений на плоскости или в трехмерном пространстве с последующим визуальным нахождением решения (Леоненков, 2005).

9. Задача о рационе для объектов аквакультуры и методика ее решения с помощью табличного процессора MS Excel.

Общая формулировка задачи

Имеется n видов кормов, каждый из которых содержит m питательных веществ, например, белки, жиры, углеводы, витамины А, В, С и т.д. Одна единица j -го вида кормов ($j = 1, \dots, n$) содержит a_{ij} единиц i -го питательного вещества ($i = 1, \dots, m$) и имеет стоимость c_j . Требуется составить такой рацион, который удовлетворял бы всем потребностям в питательных веществах b_i ($i = 1, \dots, m$) и имел минимальную стоимость.

Итак, допустим, имеется 7 видов кормов, (K1, K2,...K7), каждый из которых отличается определенным составом протеина, жиров и углеводов (табл. 4).

Стоимость весовой единицы компонентов кормов (С)

C1=206 руб.;

C2=243 руб.;

C3=360 руб.;

C4=89 руб.;

C5=90 руб.;

C6=85 руб.; C7=65

руб..

Таблица 4

Исходные данные для задачи (содержание приведено в граммах на 1 кг корма)

Компонент корма	K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7
Протеин	500	440	400	150	640	220	600
Жиры	120	320	290	100	200	200	100
Углеводы	230	100	100	212	260	380	155

Средняя масса молоди рыб в хозяйстве составляет 100 г, при этом суточная потребность в корме, содержащем 50% протеина, 18% углеводов и 11% жиров, составляет 4% массы тела. Рассчитать оптимальный рацион минимальной стоимости, приняв количество выращиваемой рыбы в 2000 экземпляров.

Исходя из условий, можем определить, что суточная потребность одной рыбы составляет 2 г белка, 0,72 г углеводов и 0,44 г жиров. Соответственно при популяции в 2000 особей такая потребность будет составлять 4 кг, 1,44 кг и 0,88 кг соответственно.

Необходимо оптимизировать состав кормовой смеси исходя из заданных ограничений, а именно минимизировать кормовые затраты, соблюдая уровень минимальной потребности в компонентах.

Для решения данной задачи с помощью программы MS Excel создадим новую книгу с именем **Линейное программирование** и изменим имя ее первого рабочего листа на **Задача о рационе**. Для решения поставленной задачи выполним следующие подготовительные действия:

1. Внесем необходимые надписи в ячейки **A1:I1, A2:A7, B4, I4, J4**. Следует отметить, что конкретное содержание этих надписей не оказывает никакого влияния на решение рассматриваемой задачи линейного программирования.

- В ячейки **B3:H3** введем значения коэффициентов целевой функции: $C1 = 2060$, $C2 = 2430$, $C3 = 3600$, $C4 = 890$, $C5 = 140$, $C6 = 230$, $C7 = 650$.
- В ячейку **I2** введем формулу: **=СУММПРОИЗВ(B2:H2;B3:H3)**, которая представляет целевую функцию.
- В ячейки **B5:H7** введем значения коэффициентов ограничений, взятых из табл. 4.
- В ячейки **J5:J7** введем значения правых частей ограничений, соответствующих минимальной суточной потребности в питательных веществах: в белках $b_1 = 100$, жирах $b_2 = 70$ и углеводах $b_3 = 400$.
- В ячейку **I5** введем формулу: **=СУММПРОИЗВ(\$B\$2:\$H\$2;B5:H5)**, которая представляет левую часть ограничения вида:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\geq b_1 \\ \{ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\geq b_2 \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\geq b_m \end{aligned}$$

Скопируем формулу, введенную в ячейку **I5**, в ячейки **I6** и **I7**.

Исходная информация на листе должна быть в итоге организована следующим образом (табл. 5).

Таблица 5

Организация ввода данных на рабочем листе

Переменные	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	Значение целевой функции	
Значения								=СУММПРОИЗВ(B2:H2;B3:H3)	
Стоимость	206	243	360	89	90	85	65		
	Коэффициенты ограничений							Значения ограничений	Сут. потребности
по протеинам	500	440	400	150	640	220	600	=СУММПРОИЗВ(\$B\$2:\$H\$2;B5:H5)	4000
по жирам	120	320	290	100	200	200	100	=СУММПРОИЗВ(\$B\$2:\$H\$2;B6:H6)	880
по углеводам	230	100	100	212	260	380	155	=СУММПРОИЗВ(\$B\$2:\$H\$2;B7:H7)	1440

Далее запускаем **Поиск решения**, после чего выполняем следующие действия:

- В поле с именем **Установить целевую ячейку**: ввести абсолютный адрес ячейки **\$I\$2**.
- Для группы **Равной**: выбрать вариант поиска решения — **минимальному значению**.
- В поле с именем **Изменяя ячейки**: ввести абсолютный адрес ячеек **\$B\$2:\$H\$2**.
- Добавить 3 ограничения, представляющие минимальные суточные потребности в питательных веществах. С этой целью выполнить следующие действия:
 - для задания первого ограничения в исходном диалоговом окне **Поиск решения** нажать кнопку с надписью **Добавить**;
 - в появившемся дополнительном окне выбрать ячейку **\$I\$5**, которая должна отобразиться в поле с именем **Ссылка на ячейку**;
 - в качестве знака ограничения из выпадающего списка выбрать нестрогое неравенство **">="**;

- в качестве значения правой части ограничения выбрать ячейку **\$J\$5**;
 - для добавления первого ограничения в дополнительном окне нажать кнопку с надписью **Добавить**;
 - аналогичным образом задать оставшиеся два ограничения.
5. Добавить ограничение на допустимые значения переменных. С этой целью выполнить следующие действия:
- в исходном диалоговом окне **Поиск решения** нажать кнопку с надписью **Добавить**;
 - в появившемся дополнительном окне выбрать диапазон ячеек **\$B\$2:\$H\$2**, который должен отобразиться в поле с именем **Ссылка на ячейку**;

в качестве знака ограничения из выпадающего списка выбрать нестрогое неравенство **">="** в качестве значения правой части ограничения в поле с именем **Ограничение**: ввести значение 0; для добавления ограничения в дополнительном окне нажать кнопку с надписью **Добавить**.

6. В дополнительном окне параметров поиска решения следует выбрать отметки **Линейная модель** и **Неотрицательные значения**.

После задания ограничений и целевой функции можно приступить к поиску численного решения, для чего следует нажать кнопку **Выполнить**. После выполнения расчетов программой MS Excel будет получено количественное решение, которое имеет вид, представленный в таблице 6.

Таблица 6

Результат выполнения вычислений в программе MS Excel

Переменные	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	Значение целевой функции	
Значения	0	0	0	0	0,17	1,21	6,04	510,78	
Стоимость	206	243	360	89	90	85	65		
	Коэффициенты ограничений							Значения ограничений	Сут. потребности
по белкам	500	440	400	150	640	220	600	4000	4000
по жирам	120	320	290	100	200	200	100	880	880
по углеводам	230	100	100	212	260	380	155	1440	1440

Результатом решения задачи об оптимальной диете являются найденные оптимальные значения переменных: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0,17$, $x_6 = 1,21$, $x_7 = 6,04$, которым соответствует значение целевой функции: $f_{opt} = 510,78$. При выполнении расчетов для ячеек **B2:I2** был выбран числовой формат с 2 знаками после запятой.

Задание для студентов.

1. Имеется 7 видов компонентов корма: K1...K7, а в качестве питательных веществ рассматриваются протеины, жиры, углеводы ($P = 3$). Стоимость 1 кг каждого из компонентов следующая (руб.): $C_1 = 137$, $C_2 = 138$, $C_3 = 135$, $C_4 = 146$, $C_5 = 150$, $C_6 = 207$, $C_7 = 180$. В фермерском хозяйстве выращивается форель, на данный момент масса особей составляет порядка 60 г. При данной массе и температуре содержания 20°C норма кормления составляет 2,6% массы тела в сутки, а оптимальное содержание основных питательных веществ в кормовой смеси следующее: протеины 29,7%, жиры 8%, углеводы 5,4%. Содержание питательных веществ в каждом из компонентов представлено в таблице 7.

Исходные данные

	K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7
Протеины	400	220	460	410	540	200	200
Жиры	110	100	100	120	150	130	140
Углеводы	100	88	70	85	90	120	110

Требуется определить такой рацион питания, чтобы каждое питательное вещество содержалось в нем в необходимом количестве, обеспечивающем суточную потребность объекта выращивания, и при этом суммарные затраты на корм были минимальны.

2. Каждый обучающийся должен сформулировать не менее 2 разных примеров задачи, аналогичной рассмотренным выше, и имеющих отношение к решению проблем рыбохозяйственного комплекса.

9. Графические методы решения задач линейного программирования (с применением средств MS Excel) – преимущества и ограничения.

Задачи производственного планирования в аквакультуре и способы их графического решения в среде MS Excel

Задача о витаминно-минеральных премиксах отличается простотой постановки и служит, главным образом, для иллюстрации графического способа решения задач линейного программирования. Данный способ позволяет не только наглядно представить форму множества допустимых альтернатив, но и собственно процесс нахождения оптимального решения. Говоря о простоте и наглядности графического способа, в то же время следует отметить его ограниченный характер, поскольку его использование возможно только для задач линейного программирования с двумя переменными, хотя и произвольным числом ограничений (Леоненков, 2005).

Задача о витаминно-минеральных премиксах является частным случаем типовой задачи линейного программирования, связанной с планированием производства или оптимальным выпуском продукции. Данная типовая задача была одной из первых, с которой началось развитие собственно моделей и методов линейного программирования. Цель рассмотрения модели планирования производства состоит в определении уровней или объемов производства отдельных видов производственной деятельности, при которых оптимизируется (максимизируется или минимизируется) общий результат производственной деятельности системы в целом без нарушения ограничений, накладываемых на использование ресурсов (Леоненков, 2005).

В общем случае для задачи о выпуске продукции вводятся в рассмотрение несколько видов выпускаемой предприятием продукции, на изготовление которой затрачивается несколько типов исходных материалов или ресурсов. При этом предполагается, что запасы этих материалов и ресурсов на предприятии ограничены. Необходимо определить такой объем выпускаемой продукции, который максимизирует общую стоимость продукции, а использованные материалы и ресурсы не превосходят при этом имеющихся на предприятии запасов (Леоненков, 2005).

При построении математических моделей задач производственного планирования в форме задачи линейного программирования следует принимать во внимание допущения пропорциональности, аддитивности и неотрицательности (Леоненков, 2005).

Пропорциональность означает, что затраты ресурсов на некоторый вид производственной деятельности, а также вклад этого вида производственной деятельности в целевую функцию линейно пропорциональны его уровню. *Аддитивность* указывает на то, что общая величина ресурсов, потребляемых в системе всеми видами производственной деятельности, равна сумме затрат ресурсов на отдельные виды производственной деятельности. Это допущение находит отражение и при построении целевой функции (Леоненков, 2005).

Первые два допущения о пропорциональности и аддитивности обеспечивают строгую линейность соответствующих функций. В практических ситуациях действительный характер зависимостей редко бывает строго линейным. Однако допущение о линейности позволяет разработать специальные вычислительные методы, использование которых показало их практическую эффективность. Именно поэтому довольно часто задачи с нелинейными зависимостями формулируют в виде задач линейного программирования, что вполне оправдано лишь в тех случаях, когда линейная аппроксимация и соответствующий приближенный характер решений не оказывают заметного влияния на адекватность математической модели (Леоненков, 2005).

Допущение *неотрицательности* означает, что ни одному из видов производственной деятельности не может быть приписан отрицательный уровень. Для большинства производственных и экономических систем, в том числе рыбохозяйственного профиля, это допущение является естественным физическим требованием их функционирования. Его включение в структуру модели линейного программирования обусловлено удобствами логического анализа (Леоненков, 2005).

Формулировка задачи (числовые данные цит. по Леоненкову (2005)).

Рыбоводное предприятие производит 2 вида рыбной продукции, x_1 и x_2 (разные виды рыб, к примеру). Для выращивания рыбы используется 3 вида витаминноминеральных премиксов, расход которых для производства одной весовой единицы рыбы каждого вида представлен в таблице 8.

Таблица 8

Расход премиксов для производства весовой единицы рыбы

Виды премиксов	x_1	x_2
B1	0,1	0,2
B2	0,2	0,1
B3	0,15	0,05

Запасы премиксов на предприятии:

$B_1=10$

$B_2=7$

$B_3=5$

Оптовая стоимость единицы рыбной продукции x_1 и x_2 равна $c_1=250$ и $c_2=230$ соответственно. Требуется определить оптимальный объем выращивания каждого вида рыб, обеспечивающего максимум готовой рыбной продукции при минимуме затрат на премиксы.

В данной задаче исходными переменными будут x_1 – объем выращивания рыбной продукции первого типа и x_2 – второго типа.

Математическая постановка задачи может быть записана в следующем виде:

$$250x_1 + 230x_2 \rightarrow \max_{x \in \beta} \quad (20)$$

Множество допустимых альтернатив формируется следующей системой ограничений типа неравенств:

$$\begin{cases} 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 10 \\ 0,2x_2 + 0,1x_1 \leq 7 \end{cases} \quad (21)$$

$0,15x_1 + 0,05x_2 \leq 5$ $x_1, x_2 \geq 0$. Создадим файл MS Excel, а в нем рабочий лист с именем Задача о премиксах.

Необходимо построить на плоскости диаграмму, содержащую изображение области допустимых альтернатив, соответствующей целевой функции (20) и системе ограничений (21). Область допустимых альтернатив будет ограничена прямыми линиями, которым соответствуют выполнение равенств для всех ограничений.

На одной диаграмме нужно изобразить 4 графика линейных функций.

Для построения области допустимых альтернатив необходимо использовать 3 следующих функции:

$$\begin{aligned} y_1 &= 10/0,2 - (0,1/0,2)*x_1 = 50 - 0,5*x_1 \\ y_2 &= 7/0,1 - (0,2/0,1)*x_1 = 70 - 2*x_1 \\ y_3 &= 5/0,05 - (0,15/0,05)*x_1 = 100 - 3*x_1 \end{aligned}$$

в качестве зависимой переменной y использована переменная x_2 данной задачи. Четвертой линейной функцией станет целевая функция (1).

Выполнение:

1. В ячейку **A1** вводится текст «Значения переменной x_1 », в ячейку **A2** – «Значения функции f_1 », в ячейку **A3** – «Значения функции f_2 », в ячейку **A4** – «Значения функции f_3 », в ячейку **A5** – «Значения целевой функции».

2. Для построения линейной функции достаточно двух значений независимой переменной x_1 ; введем в ячейку **B1** значение 0, в ячейку **C1** – значение 34.

3. В ячейку **B2** введем формулу **=50-0,5*B1**, соответствующую первому ограничению и скопируем ее в ячейку **C2**, там она должна иметь вид **=50-0,5*C1**.

4. В ячейку **B3** вводим формулу **=70-2*B1**, соответствующую второму ограничению, копируем ее в ячейку **C2**, где она принимает вид **=70-2*C1**.

5. В ячейку **B4** вводим формулу **=100-3*B1**, соответствующую третьему ограничению, копируем формулу в ячейку **C4**, где она принимает вид **=100-3*C1**.

6. В ячейку **B5** вводим формулу **=60-(25/23)*B1**, которая соответствует целевой функции. Копируем формулу в ячейку **C5**, где она принимает вид **=60-(25/23)*C1**.

Организация исходной информации на рабочем листе должна соответствовать таблице 9

Таблица 9

Размещение исходных данных на рабочем листе

Значения переменной x_1	0	34
Значения функции f_1	=50-0,5*B1	=50-0,5*C1
Значения функции f_2	=70-2*B1	=70-2*C1
Значения функции f_3	=100-3*B1	=100-3*C1
Значения целевой функции	=60-(25/23)*B1	=60-(25/23)*C1

После, выделив заполненный диапазон, строим диаграмму. Выбираем вкладку «Вставка», тип диаграммы «Точечная», подтип «С прямыми отрезками», после построения диаграммы нужно щелкнуть на ней правой кнопкой мыши, в контекстном меню выбрать пункт «Выбрать данные», убедиться, что в качестве рядов выбраны строки. Выделяя линии ограничений, удобно выбрать в качестве формата отображения штриховые линии.

Результат построения приведен на рисунке 14.

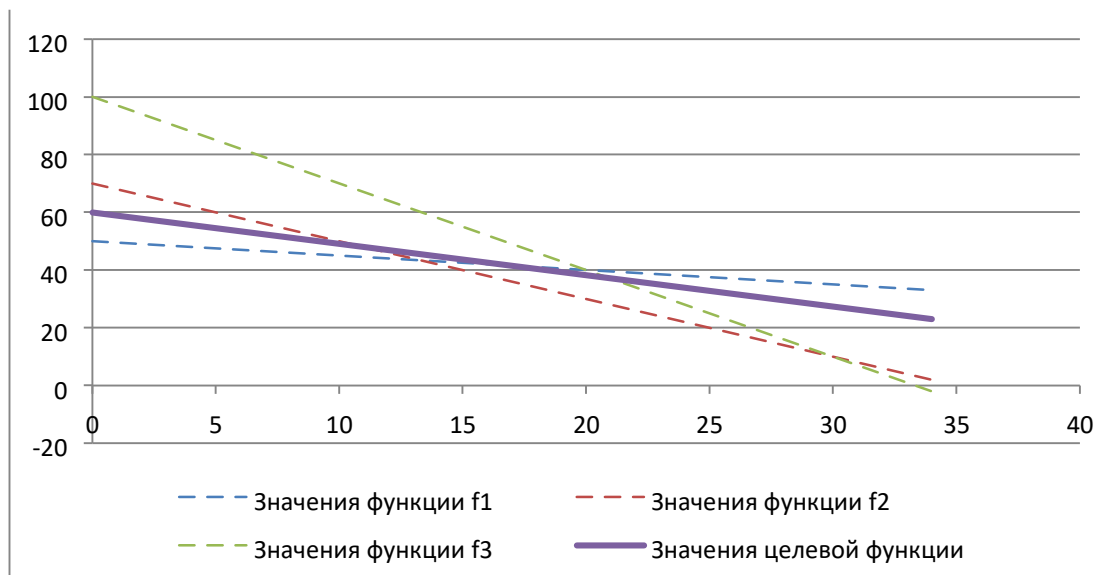


Рис. 14. Диаграмма, отображающая функции ограничений и целевую функцию

Область допустимых альтернатив образуется пересечением пяти полуплоскостей, каждая из которых соответствует отдельному ограничению. Образуется выпуклый многогранник на плоскости. При этом каждая точка этой области является допустимым решением задачи (например, проверьте это для точки с координатами $x_1=10$, $x_2=10$; $x_1=10$, $x_2=40$). Исходя из данных проверки можно видеть, что чем ближе точка расположена по отношению к прямой, соответствующей целевой функции, тем большее значение достигается допустимым решением (4800 и 11700 – это значения целевой функции по результатам проверок).

Продолжая выбор точек из области допустимых альтернатив, можно заметить, что оптимальное решение исходной задачи, соответствующее максимуму целевой функции, находится в точке пересечения первого и второго ограничений. Эта точка, являясь допустимой, располагается ближе остальных точек многогранника к построенной линии уровня целевой функции.

Для нахождения значений переменных оптимального решения необходимо найти координаты точки пересечения прямых, соответствующих линейным функциям первого и второго ограничений.

Решаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 0,1x_1 + 0,2x_2 = 10 \\ 0,2x_1 + 0,1x_2 = 7 \end{cases}$$

1. В ячейку **A6** вводим текст «Значения переменных», **A7** – «Значения разности функций», **A8** – «Значение целевой функции»
2. В ячейку **B7** вводим формулу $=50-0,5*B6-70+2*B6$, соответствующую разности первых двух ограничений. Значение переменной из ячейки **B6**, при котором эта разность будет равна 0, является искомым оптимальным значением для x_1 .
3. В ячейку **B8** вводим формулу $=250*B6+230*C6$, это расчет значения целевой функции.
4. В ячейку **C6** введем формулу $=50-0,5*B6$, необходимую для нахождения оптимального значения x_1 .

В результате информация на листе будет организована следующим образом (табл. 10).

Таблица 10

Промежуточный этап вычислений

Значения переменной x_1	0	34
Значения функции f_1	$=50-0,5*B1$	$=50-0,5*C1$
Значения функции f_2	$=70-2*B1$	$=70-2*C1$
Значения функции f_3	$=100-3*B1$	$=100-3*C1$
Значения целевой функции	$=60-(25/23)*B1$	$=60-(25/23)*C1$
Значения переменных		$=50-0,5*B6$
Значение разности функций	$=50-0,5*B6-70+2*B6$	
Значение целевой функции	$=250*B6+230*C6$	

Для нахождения оптимума вызываем инструмент **Подбор параметра**. Вкладка **Данные**, раздел **Работа с данными**, пункт **Анализ «что-если»**.

В первую строку с именем **Установить в ячейке** следует ввести ячейку **B7**, в которую раньше была введена формула разности двух первых ограничений. В строку **Значение** подбора параметров вводим 0 (искомая разность двух первых ограничений, обеспечивающая оптимальное решение). Наконец, в последнюю строку **Изменяя значение ячейки** нужно ввести ячейку **B6** (см. рис. 15).

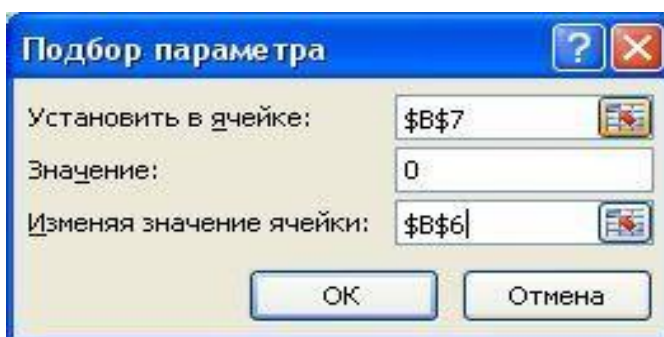


Рис. 15. Свойства мастера Подбора параметра для решаемой задачи

Нажав ОК, получаем решение:

Оптимальные значения переменных исходной задачи:

$x_1=13,3$ вес. ед. (ячейка **B6**) $x_2=43,3$

вес. ед. (ячейка **C6**)

При этом достигается максимум целевой функции (сумма выручки от продажи обоих видов рыбы) 13300 ден. единиц.

Разберем еще одну задачу, на этот раз не прибегая к вычислительным средствам MS Excel.

Озеро туристической базы заселяется каждой весной двумя видами рыб: $S1$ и $S2$. Средняя масса заселяемой рыбы равна 4 кг для $S1$ и 2 кг для $S2$. В озере имеется два вида пищи $F1$ и $F2$, составляющие основной рацион рыб. Средние потребности одной рыбы вида $S1$ составляют 1 ед. $F1$ и 3 ед. $F2$ за сутки. Аналогичные потребности для рыбы вида $S2$ составляют 2 ед. $F1$ и 1 ед. $F2$. Ежедневный запас пищи поддерживается на уровне 500 ед. $F1$ и 900 ед. $F2$. Как следует заселить озеро, чтобы максимизировать общую массу двух видов рыб? (Гроссман, 1983).

Обозначим численности рыб вида $S1$ и $S2$ через $x1$ и $x2$. Тогда общая масса заселенной в озеро рыбы будет составлять:

$$W = 4x1 + 2x2$$

При этом общее потребление пищи $F1$ равно $x1+2x2$, а общее потребление пищи $F2$ равно $3x1+x2$. Всего имеется 500 единиц $F1$ и 900 единиц $F2$, соответственно должны выполняться следующие условия, заданные в виде ограничений:

$$x1+2x2 \leq 500;$$

$$3x1+x2 \leq 900; x1 \geq 0;$$

$$x2 \geq 0$$

Область допустимых значений функции Δ_β при заданных ограничениях лежит в положительном квадранте плоскости $x1Ox2$, где задается прямыми $x1+2x2=500$ и $3x1+x2=900$. Чтобы решить задачу, нужно отыскать максимум величины $W=4x1+2x2$ в области допустимых значений. Для этого строим ряд прямых $4x1+2x2=c$ при значениях $c=2000$, $c=1800$ и т.д. В результате получаем ряд параллельных прямых, на каждой из которых значение W равно выбранному c в любой точке прямой. Чтобы отыскать максимум W на Δ_β , найдем прямую $4x1+2x2=c$, пересекающую область Δ_β и имеющую наибольшее значение c . Значение c возрастает по мере того, как параллельные прямые передвигаются вправо. Как видно из рисунка 16, где приведено решение задачи, максимальное значение W совпадает со значением c для прямой $4x1+2x2=c$, проходящей через P – точку пересечения прямых $x1+2x2=500$ и $3x1+x2=900$. Координатами P являются $x1=260$ и $x2=120$, что дает значение $W=4*260+2*120=1280$. Итак, в озере можно поддерживать максимальную массу 1280 фунтов, если заселить 260 рыб вида $S1$ и 120 рыб вида $S2$.

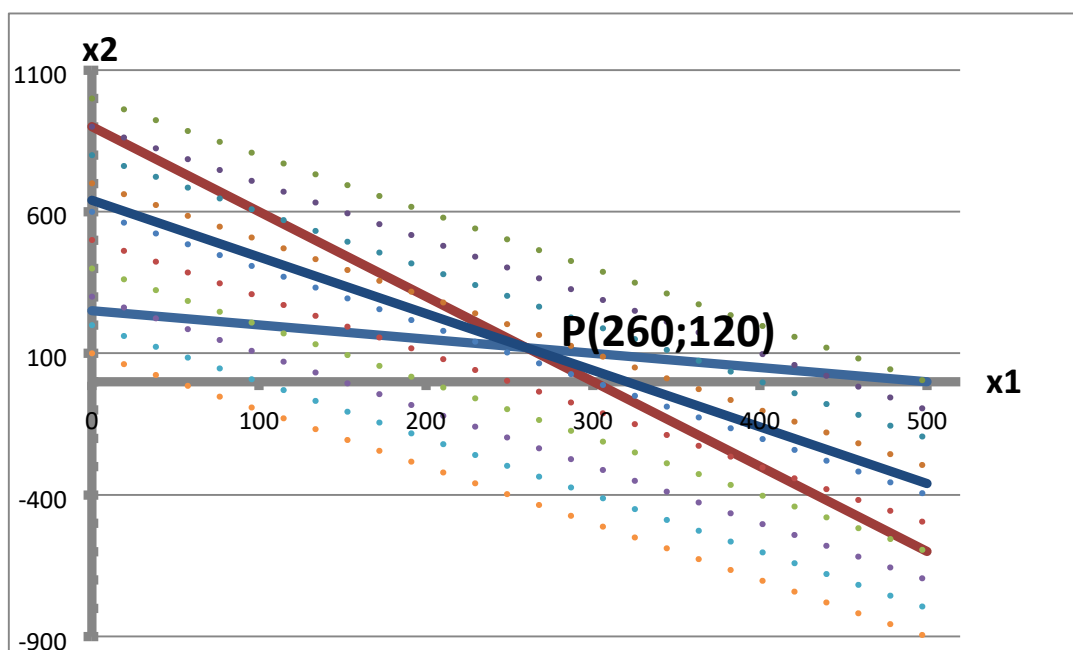


Рис. 16. Решение задачи. Пунктирными линиями обозначены прямые $4x_1+2x_2=c$; жирными линиями обозначены прямые, задающие Δ_β , а также прямая, содержащая решение задачи

Задания для студентов.

Задача 1. Проверить решение первой задачи-примера с помощью мастера **Поиска решения** MS Excel.

Задача 2. Решить вторую задачу средствами MS Excel графическим методом, а также с помощью мастера **Поиска решения**.

Задача 3. Решить предыдущую задачу при условии, что ежедневный запас пищи поддерживается на уровне 1000 ед. F1 и 1800 ед. F2.

Задача 4. Решить предыдущую задачу при условии поддержания запаса пищи в 1000 ед. для F1 и F2.

Задача 5. Как следует заселить озеро в условиях задач 2 – 4 чтобы максимизировать общую численность рыб? Какова в этих случаях общая масса рыб?

10. Транспортная задача линейного программирования, значение данного класса задач для крупных производственных объединений рыбохозяйственного профиля

Математическая постановка транспортной задачи

В общем случае математическая постановка транспортной задачи может быть сформулирована в следующем виде. Имеется m пунктов производства или хранения и n пунктов потребления некоторого однородного продукта. Для каждого из пунктов задан a_i — объем производства или запаса продукта в i -том пункте ($i \in \{1, 2, \dots, m\}$), а для каждого пункта потребления задана b_j — потребность в продукте в j -том пункте потребления ($j \in \{1, 2, \dots, n\}$). Известна c_{ij} — стоимость перевозки или транспортировки одной единицы продукта из i -го пункта производства в j -й пункт потребления. Требуется определить оптимальный план перевозок продукта, так чтобы потребность во всех пунктах

потребления были удовлетворены, а суммарные затраты на транспортировку всей продукции были минимальными (Леоненков, 2005).

Введем в рассмотрение следующие переменные: x_{ij} — количество транспортируемого продукта или объем перевозок из i -го пункта производства в j -й пункт потребления. Тогда в общем случае математическая постановка транспортной задачи может быть сформулирована следующим образом:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \in \Delta \beta \rightarrow \min$$

где множество допустимых альтернатив A_p формируется следующей системой ограничений типа неравенств:

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, m\} \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\} \\ \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \\ x_{ij} \geq 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\} \end{array} \right\}$$

Классическая транспортная задача линейного программирования является *сбалансированной* или *закрытой*, т. е. формулируется в форме, когда имеет место равенство общего объема производства рассматриваемого продукта общему объему его потребления. Этому условию соответствует третье ограничение указанной выше системы ограничений. В противном случае транспортная задача называется *несбалансированной* или *открытой* (Леоненков, 2005).

Пример задачи линейного программирования:

У организации 4 центра производства продукции (молодь) и 5 центров распределения. Производство находится близ поселков А1, А2, А3, А4 и производит 200, 150, 225 и 175 кг продукции еженедельно. Распределительные центры располагаются в городах В1, В2, В3, В4 и В5 и обладают емкостью 100, 200, 50, 250 и 175 кг продукции. Хранение на производстве продукции существенно дороже, чем в центре распределения и сбыта – обходится в 75 р. в день за 1 килограмм. В то же время штраф за просрочку поставки заказанной и не поставленной продукции составляет 224 р. за 1 кг. Хранение продукции в центре обходится лишь в 5 р. за 1 кг. Таким образом, перед нами будет стоять задача оптимизации перевозок. Стоимости перевозок – в таблице 11.

Таблица 11

Исходные данные для транспортной задачи

	B1	B2	B3	B4	B5	Производство
A1	15	20	17	22	22	200
A2	25	20	17	10	15	150
A3	20	15	15	17	17	225
A4	20	5	17	17	17	175
Емкость	100	200	50	250	150	

Соответствующая математическая постановка задачи может быть записана в следующем виде:

$$15x_{11} + 20x_{12} + 17x_{13} + 22x_{14} + 22x_{15} + 25x_{21} + 20x_{22} + 17x_{23} + 10x_{24} + 15x_{25} + 20x_{31} + 15x_{32} + 15x_{33} + 17x_{34} + 17x_{35} + 20x_{41} + 5x_{42} + 17x_{43} + 17x_{44} + 17x_{45} \rightarrow \min$$

$\in \Delta$ x_{β}

Множество допустимых альтернатив Δ_{β} при этом формируется следующей системой ограничений типа равенств:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 200$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 150$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 225$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} = 175$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 100$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 50 \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} = 150 \\ x_{ij} \geq 0, \forall i \in \{1,2,3,4\}, \forall j \in \{1,2,3,4,5\} \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 250 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 200 \end{array} \right\}$$

Решение:

1. Вводим стоимость перевозок (диапазон **B3:F6**) – коэффициенты целевой функции.
2. Отводим диапазон аналогичного размера под искомые величины – оптимальных объемов перевозок (**B8:F11**).
3. Ячейки **B13:F13** заполним значениями емкости центров распределения и сбыта продукции
4. Целевая функция будет располагаться в ячейке **B16** и выглядеть в нотации Excel следующим образом: **=СУММПРОИЗВ(B3:F6;B8:F11)**.
5. В ячейки **H8:H11** ввести объемы производства на фабриках. Таким образом, в ячейках диапазонов **B13:F13** и **H8:H11** будет располагаться информация, соответствующая правым частям указанных выше ограничений.
6. Ячейки **G8:G11** заполнить формулами суммирования столбцов с **B** по **F**, ячейки **B12:F12** – формулами сумм строк с 8 по 11.

7. Запустить Поиск решения:

В поле с именем **Установить целевую ячейку** ввести **\$B\$16** Для группы **Равной:** выбрать вариант **минимальному значению** В поле с именем **Изменяя ячейки:** ввести адрес диапазона **\$B\$8:\$F\$11**

Добавить указанные выше ограничения задачи:

\$B\$12:\$F\$12=\$B\$13:\$F\$13

\$B\$8:\$F\$11>=0

\$G\$8:\$G\$11=\$H\$8:\$H\$11

(Информатика..., 2011)

Подготовленная для решения задачи информация должна быть организована на листе следующим образом (табл. 12).

Итоговое решение задачи представлено в табл. 13.

Таблица 12

Размещение исходной информации на рабочем листе MS Excel

Стоимости перевозок							
	B1	B2	B3	B4	B5		
A1	15	20	17	22	22		
A2	25	20	17	10	15		
A3	20	15	15	17	17		
A4	20	5	17	17	17		
Объемы перевозок							Производство
						=СУММ(B8:F8)	200
						=СУММ(B9:F9)	150
						=СУММ(B10:F10)	225
						=СУММ(B11:F11)	175
	=СУММ(B8:B11)	=СУММ(C8:C11)	=СУММ(D8:D11)	=СУММ(E8:E11)	=СУММ(F8:F11)		
Емкости	100	200	50	250	150		
	Целевая функция						
	=СУММПРОИЗВ(B3:F6;B8:F11)						

Таблица 13

Результат решения задачи

Стоимости перевозок							
	B1	B2	B3	B4	B5		
A1	15	20	17	22	22		
A2	25	20	17	10	15		
A3	20	15	15	17	17		

А4	20	5	17	17	17		
перевозок Объемы							Производство
	100	25	50	0	25	200	200
	0	0	0	150	0	150	150
	0	0	0	100	125	225	225
	0	175	0	0	0	175	175
	100	200	50	250	150		
Емкости	100	200	50	250	150		
	Целевая функция						
	9600						

Задачи для студентов.

Задача 1. Имеется 4 центра производства (А1 – А4) и 3 центра распределения и сбыта продукции (В1 – В3). Объемы производства следующие: А1 – 155,5 т, А2 – 250 т, А3 – 170 т, А4 – 134,5 т. Требуемые объемы хранения в центрах распределения и сбыта: В1 – 350 т, В2 – 250 т, В3 – 400 т. Стоимость транспортировки 1 т продукции задана в таблице 14: Таблица 14 **Условия транспортной задачи (Леоненков, 2005)**

Пункты потребления/пункты производства	В1	В2	В3
А1	100	90	110
А2	75,5	80	95
А3	80	85	100
А4	70	95	105

Требуется определить оптимальный план перевозок так, чтобы вся выращенная продукция была направлена в центры распределения и сбыта, а суммарные затраты на транспортировку были минимальными (Леоненков, 2005).

Задача 2. Рыбоводная продукция производится на предприятиях А1, А2, А3 и транспортируется в центры сбыта В1, В2, В3, В4. В таблице 15 указаны – объем производства, емкость центров хранения и сбыта, стоимость перевозки единицы продукции. Необходимо составить оптимальный план перевозки продукции, при котором стоимость всех перевозок будет минимальна.

Таблица 15

Условия транспортной задачи (Вуколов, 2013)

	B1	B2	B3	B4	Объем производства
A1	20	47	31	13	49
A2	3	38	44	10	18
A3	11	32	46	17	68
Емкость	45	30	10	45	

Задача 3.

Решить предыдущую задачу для иных условий (табл. 16)

Таблица 16

Условия транспортной задачи (Вуколов, 2013)

	B1	B2	B3	B4	Объем производства
A1	47	31	13	45	34
A2	20	47	31	13	44
A3	4	42	41	2	68
Емкость	30	45	41	80	

Задача 4.

Решить задачу 2 для условий, обозначенных в таблице 17

Таблица 17

Условия транспортной задачи (Вуколов, 2013)

	B1	B2	B3	B4	Объем производства
A1	31	13	45	35	48
A2	38	44	10	33	48
A3	2	47	31	13	44
Емкость	40	41	45	44	

Задача 5.

Решить задачу 2 для условий, обозначенных в таблице 18.

Таблица 18

Условия транспортной задачи (Вуколов, 2013)

	B1	B2	B3	B4	Объем производства
A1	13	45	35	7	49
A2	47	31	13	45	47
A3	32	46	17	27	68
Емкость	45	80	44	45	

Задача 6

Решить задачу 2 для условий, обозначенных в таблице 19.

Таблица 19

Условия транспортной задачи (Вуколов, 2013)

	B1	B2	B3	B4	Объем производства
A1	45	35	7	43	48
A2	44	10	33	46	41

A3	42	41	2	38	49
Емкость	44	12	88	44	

12. Задачи оптимизации с булевыми переменными: задача о назначении, ее значимость как компонента стратегии управления человеческими ресурсами на предприятиях рыбохозяйственного профиля

Задачи дискретной и комбинаторной оптимизации отличаются от классических задач нелинейной оптимизации и линейного программирования исключением из их постановки условия непрерывности допустимых значений исходных переменных. В общем случае все экстремальные задачи подобного рода принято относить к классу задач дискретной оптимизации. При этом целевая функция и ограничения задач дискретной оптимизации могут быть как линейными, так и нелинейными. В случае линейности целевой функции и ограничений соответствующие задачи образуют класс задач целочисленного линейного программирования (Леоненков, 2005).

Класс задач оптимизации с булевыми переменными является подклассом задач дискретной оптимизации, для которых вводится дополнительное требование — переменные должны принимать булевы значения. В рамках задач этого класса важное место занимает подкласс задач булева линейного программирования, к которому относятся задачи оптимизации с булевыми переменными с дополнительным свойством линейности целевой функции и ограничений (Леоненков, 2005).

Общая постановка задачи оптимизации с булевыми переменными

К классу задач оптимизации с булевыми переменными относятся такие задачи однокритериальной оптимизации, в которых переменные могут принимать только значения 0 или 1. При этом на характер целевой функции и ограничений в общем случае не накладывается никаких требований. Более строгое определение данного класса задач можно получить на основе рассмотрения общей математической постановки задачи оптимизации с булевыми переменными (Леоненков, 2005).

В общем случае математическая постановка задачи оптимизации с булевыми переменными может быть сформулирована в следующем виде:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max_{x \in \Delta_\beta} \quad (20)$$

$$\Delta_\beta = \{\Delta | g_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq (=) b_k; x_1, x_2, \dots, x_n \in \{0, 1\}, (k \in \{1, 2, \dots, m\})\} \quad (21)$$

Математическую модель (20) и (21) называют также задачей *булева программирования*. Если дополнительно в данную математическую модель вводятся предположения о линейном характере целевой функции и левых частей ограничений, то соответствующую задачу часто называют задачей *булева линейного программирования* (Леоненков, 2005).

В этом случае общая задача булева линейного программирования может быть сформулирована следующим образом. Необходимо найти максимум линейной целевой функции n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n \in \{0, 1\}$ следующего вида:

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \rightarrow \max_{x \in \Delta_\beta} \quad (22)$$

где множество допустимых альтернатив Δ_β формируется следующей системой ограничений типа равенств и неравенств:

$$\{ \quad a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n = b_i \quad (\forall i \in \{1, 2, \dots, q\}) \quad (23)$$

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \leq b_k \quad (\forall k \in \{q+1, \dots, m\}) \quad (24)$$

В математической постановке общей задачи булева линейного программирования через $c_i, a_{ki}, b_k (\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \forall k \in \{1, 2, \dots, m\})$ обозначены постоянные величины, которые могут принимать произвольные, как правило, целочисленные значения, предопределяемые спецификой конкретной задачи линейного программирования (Леоненков, 2005).

В случае отсутствия ограничений типа равенств (23), т. е. при $q = 0$, задачу булева линейного программирования называют также *задачей булева линейного программирования с ограничениями типа неравенств*. Напротив, в случае отсутствия ограничений типа неравенств (24), т. е. при $q = m$, задачу булева линейного программирования называют также *задачей булева линейного программирования с ограничениями типа равенств* (Леоненков, 2005).

При анализе множества допустимых альтернатив Δ_β общей задачи булева программирования (20) и (21) оказывается справедливой одна из двух возможных ситуаций:

1. Система ограничений (21) противоречива или несовместна, т. е. не существует такого набора значений $x_1, x_2, \dots, x_n$, которые удовлетворяют ограничениям (21). В этом случае задача булева программирования не имеет решения.
2. Система ограничений (21) не является противоречивой. В этом случае задача булева программирования имеет решение, которое, в общем случае, может быть не единственным (Леоненков, 2005).

Математическая постановка задачи о назначении

Имеется n видов работ, которые могут быть выполнены n кандидатами, где n — некоторое натуральное число. При этом каждого кандидата следует назначить на выполнение только одной работы, а каждая работа может выполняться только одним кандидатом. Заданы эффективности $c_{ij} (\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\})$ индивидуального выполнения каждым из потенциальных кандидатов всех рассматриваемых работ. Требуется распределить всех кандидатов по работам, так чтобы общая эффективность выполнения всех работ была наибольшей (Леоненков, 2005).

Введем в рассмотрение следующие булевы переменные: x_{ij} , которые будут соответствовать назначению кандидатов на выполнение работ. В этом случае резонно предположить, что $x_{ij} = 1$, если i -й кандидат назначается на выполнение j -й работы, и $x_{ij} = 0$, если i -й кандидат не назначается на выполнение j -й работы. Тогда математическая постановка задачи о назначении может быть сформулирована следующим образом.

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \max_{x \in \Delta_\beta} \quad (25)$$

где множество допустимых альтернатив Δ_β формируется следующей системой ограничений типа неравенств:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (26)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (27) \\ x_{ij} \in \{0, 1\}, (\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}) \quad (28) \end{array} \right.$$

В математической постановке задачи о назначении (25)—(28) ограничение (26) соответствует требованию назначения каждого кандидата на выполнение только одной работы, а ограничение (27) — требованию выполнения каждой работы только одним кандидатом. Нетрудно заметить, что общее число булевых переменных задачи о назначении равно: n^2 .

Классическая задача о назначении является *симметричной*, т. е. формулируется в форме, когда имеет место равенство общего числа работ и общего числа кандидатов. Если это условие не выполняется, то задача о назначении называется *несимметричной* (Леоненков, 2005).

Хотя классическая задача о назначении формулируется как задача максимизации целевой функции (25), она достаточно просто может быть преобразована в эквивалентную задачу с минимизацией целевой функции. Для этого необходимо все значения c_{ij} умножить на -1, после чего полученные значения сложить с достаточно большим положительным числом, так чтобы все c_{ij} были положительными. Полученную подобным образом задачу о назначении с минимизацией целевой функции можно рассматривать как специальный случай транспортной задачи, когда объемы пунктов производства и потребности пунктов потребления равны 1 (Леоненков, 2005).

Если вместо эффективности выполнения работ кандидатами рассматриваются затраты, связанные с назначением кандидатов на выполнение работ, то исходная задача о назначении будет соответствовать задаче минимизации целевой функции (25). В итоге задача о назначении формулируется, как задача поиска оптимального назначения, которому соответствует минимум общих затрат на выполнение работ кандидатами. При этом ограничения задачи (26)—(28) остаются без изменения (Леоненков, 2005).

Нетрудно заметить, что любое допустимое решение задачи о назначении удобно представить в форме так называемой *булевой матрицы*, представляющей собой матрицу размерности $n \times n$, элементы которой принимают только двоичные значения 0 и 1. При этом булева матрица допустимого решения должна удовлетворять следующему условию: в каждой строке и каждом столбце этой матрицы должно находиться в точности по одной 1, а все остальные элементы матрицы равны 0. Очевидно, общее число единиц в матрице допустимого решения равно n . Общее число возможных назначений в задаче о назначении конечно и равно $n!$ (Леоненков, 2005).

Решение задачи о назначении с помощью программы MS Excel

Рассмотрим вариант задачи о назначении в форме минимизации общих затрат на выполнение работ. В этом случае в качестве кандидатов рассмотрим сотрудников рыболовного предприятия: Андреев, Бубнов, Васильев, Григорьев и Дмитриев, а в качестве работ — вакантные должности в этой фирме: главный рыбовод инкубационного цеха, главный рыбовод личиночного цеха, главный рыбовод УЗВ, главный рыбовод садкового цеха, главный рыбовод кормового цеха. Затраты $n_{ij} (\forall i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\})$ на замещение должностей кандидатами, связанные с необходимостью их предварительного обучения и

стажировки, заданы в форме следующей таблицы (табл. 20, числовые данные цит. по Леоненкову (2005)).

Таблица 20

Затраты на замещение должностей кандидатами

	Андреев	Бубнов	Васильев	Григорьев	Дмитриев
Главный рыбовод инкубационного цеха	5	10	9	14	6
Главный рыбовод личиночного цеха	13	15	11	19	17
Главный рыбовод УЗВ	7	14	12	8	10
Главный рыбовод садкового цеха	8	11	6	7	9
Главный рыбовод кормового цеха	15	12	17	13	16

Соответствующая математическая постановка рассматриваемой индивидуальной задачи о назначении может быть записана в следующем виде:

$$5x_{11} + 10x_{12} + 9x_{13} + 14x_{14} + 6x_{15} + 13x_{21} + 15x_{22} + 11x_{23} + 19x_{24} + 17x_{25} + 7x_{31} + 14x_{32} + 12x_{33} + 8x_{34} + 10x_{35} + 8x_{41} + 11x_{42} + 6x_{43} + 7x_{44} + 9x_{45} + 15x_{51} + 12x_{52} + 17x_{53} + 13x_{54} + 16x_{55} \rightarrow \min_{x \in \Delta_\beta} \quad (29)$$

где множество допустимых альтернатив Δ_β формируется следующей системой ограничений типа равенств:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 1 \\ \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 1 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} = 1 \\ x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} = 1 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 1 \quad (30) \\ \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 1 \\ \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} = 1 \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} = 1 \\ x_{ij} \in \{0,1\} (\forall i, j \in \{1,2,3,4,5\}) \end{array} \right.$$

Для решения сформулированной индивидуальной задачи о назначении с помощью программы MS Excel создадим в книгу **Булево программирование**, а в ней изменим имя одного из листов на **Задача о назначении**. Для решения задачи выполним следующие подготовительные действия:

1. Внесем необходимые надписи в ячейки **A7:A13**, **B1:G1**, **B7:G7**, как это обозначено в табл. 21. Следует отметить, что конкретное содержание этих надписей не оказывает никакого влияния на решение рассматриваемой задачи о назначении.
2. В ячейки **B2:F6** введем значения коэффициентов целевой функции (табл. 20).
3. В ячейку **G2** введем формулу: **=СУММПРОИЗВ(B2:F6; B8:F12)**, которая представляет целевую функцию (29).
4. В ячейку **G8** введем формулу: **=СУММ(B8: F8)**, которая представляет первое ограничение системы (30).

5. Скопируем формулу, введенную в ячейку **G8**, в ячейки **G9:G12**.
 6. В ячейку **B13** введем формулу: **=СУММ(B8:B12)**, которая представляет шестое ограничение системы (30).
 7. Скопируем формулу, введенную в ячейку **B13**, в ячейки **C13:F13**.
- Структура таблицы на рабочем листе с исходными данными для решения задачи о назначении представлена в табл. 21

Для дальнейшего решения задачи следует вызвать мастер **Поиска решения**.

После появления диалогового окна **Поиск решения** следует выполнить следующие действия:

1. В поле с именем **Установить целевую ячейку**: ввести абсолютный адрес ячейки **\$G\$2**.
2. Для группы **Равной**: выбрать вариант поиска решения— **минимальному значению**.
3. В поле с именем **Изменяя ячейки**: ввести абсолютный адрес диапазона ячеек **\$B\$8:\$F\$12**.
4. Задать первую группу ограничений, соответствующих первым 5 базовым ограничениям исходной постановки решаемой задачи о назначении (30). С этой целью выполнить следующие действия:
 - в исходном диалоговом окне **Поиск решения** нажать кнопку с надписью **Добавить**;
 - в появившемся дополнительном окне выбрать диапазон ячеек **\$G\$8:\$G\$12**, который должен отобразиться в поле с именем **Ссылка на ячейку**;
 - в качестве знака ограничения из выпадающего списка выбрать равенство "=";
 - в качестве значения правой части ограничения ввести с клавиатуры число 1;
 - для добавления первой группы ограничений в дополнительном окне нажать кнопку с надписью **Добавить**.

Таблица 21

Исходные данные для решения задачи о назначении

						Значение целевой функции
	5	10	9	14	6	=СУММПРОИЗВ (B2:F6;B8:F12)
	13	15	11	19	17	
	7	14	12	8	10	
	8	11	6	7	9	
	15	12	17	13	16	
Переменные	Xi1	Xi2	Xi3	Xi4	Xi5	Значения ограничений
X1j						=СУММ (B8:F8)
X2j						=СУММ (B9:F9)
X3j						=СУММ (B10:F10)
X4j						=СУММ (B11:F11)
X5j						=СУММ (B12:F12)
Значения	=СУММ (B8:B12)	=СУММ (C8:C12)	=СУММ (D8:D12)	=СУММ (E8:E12)	=СУММ (F8:F12)	

Коэффициенты целевой функции

5. Задать вторую группу ограничений, соответствующих оставшимся 5 базовым ограничениям исходной постановки решаемой задачи о назначении

(30). С этой целью выполнить следующие действия:

- в исходном диалоговом окне **Поиск решения** нажать кнопку с надписью **Добавить**;
- в появившемся дополнительном окне выбрать диапазон ячеек **\$B\$13:\$F\$13**, который должен отобразиться в поле с именем **Ссылка на ячейку**;
- в качестве знака ограничения из выпадающего списка выбрать равенство "=";
- в качестве значения правой части ограничения ввести с клавиатуры число 1;
- для добавления второй группы ограничений в дополнительном окне нажать кнопку с надписью **Добавить**.

6. Добавить последнее ограничение на булевы значения переменных задачи. С этой целью выполнить следующие действия:

- в исходном диалоговом окне **Поиск решения** нажать кнопку с надписью **Добавить**;
- в появившемся дополнительном окне выбрать диапазон ячеек **\$B\$8:\$F\$12**, который должен отобразиться в поле с именем **Ссылка на ячейку**;
- в качестве знака ограничения из выпадающего списка выбрать строку **"двоичн"**;
- в качестве значения правой части ограничения в поле с именем **Ограничение**: оставить без изменения вставленное программой значение **"двоичное"**;
- для добавления ограничения в дополнительном окне нажать кнопку с надписью **Добавить**.

7. В окне дополнительных параметров поиска решения выбрать отметку **Линейная модель** и **Неотрицательные значения**.

После задания ограничений и целевой функции можно приступить к поиску численного решения, для чего следует нажать кнопку **Выполнить**. После выполнения расчетов программой MS Excel будет получено количественное решение, которое имеет следующий вид (табл. 22).

Таблица 22

Результат количественного решения задачи о назначении

	Коэффициенты целевой функции					Значение целевой функции
	5	10	9	14	6	43
	13	15	11	19	17	
	7	14	12	8	10	
	8	11	6	7	9	
	15	12	17	13	16	
Переменные	X_{i1}	X_{i2}	X_{i3}	X_{i4}	X_{i5}	Значения ограничений
X_{1j}	0	0	0	0	1	1
X_{2j}	0	0	1	0	0	1
X_{3j}	1	0	0	0	0	1
X_{4j}	0	0	0	1	0	1
X_{5j}	0	1	0	0	0	1
Значения	1	1	1	1	1	

Результатом решения рассматриваемой задачи о назначении являются найденные оптимальные значения переменных: $x_{15}=1$, $x_{23}=1$, $x_{31}=1$, $x_{44}=1$, $x_{52}=1$, остальные переменные равны 0. Найденному оптимальному решению соответствует минимальное значение целевой функции: $f_{opt} = 43$.

Анализ найденного решения показывает, что при замещении вакантных должностей в рассматриваемой фирме следует на должность главного рыбоведа инкубационного цеха назначить сотрудника Дмитриева, на должность главного рыбоведа личиночного цеха — Васильева, на должность главного рыбоведа УЗВ — Андреева, на должность главного рыбоведа садкового цеха — Григорьева и, наконец, на должность главного рыбоведа кормового цеха — Бубнова. При этом общие затраты на обучение и стажировку сотрудников составят 43 тыс. рублей.

Нетрудно заметить, что решаемая задача была симметричной. Кратко рассмотрим также вариант несимметричной задачи о назначениях, числовые данные цит. по Вуколову (2013).

В конкурсе на занятие 5 вакансий участвуют 7 претендентов. Результаты тестирования каждого претендента на соответствующие вакансии даны в виде таблицы (табл. 23).

Таблица 23

Результаты тестирования претендентов

Должности/Претенденты	V1	V2	V3	V4	V5
Иванов (P1)	7	5	7	6	7
Дмитриев (P2)	6	4	8	4	9
Марский (P3)	8	6	4	3	8
Корт (P4)	7	7	8	5	7
Васильев (P5)	5	9	7	9	5
Герцин (P6)	6	8	6	4	7
Карпов (P7)	7	7	8	6	4

Вакансии НИИ пресноводного рыбного хозяйства: V1 – начальник отдела биологических основ аквакультуры; V2 – начальник отдела инновационной аквакультуры; V3 – начальник отдела экологической безопасности; V4 – начальник отдела естественных водоемов; V5 – начальник отдела криоконсервации.

Определить, какого претендента и на какую вакансию следует принять, так, чтобы сумма баллов отобранных претендентов оказалась максимальной.

Этапы решения задачи.

1. Ввод данных. Данные вводятся в ячейки рабочего листа Excel, при этом, чтобы сбалансировать задачу, вводятся дополнительные столбцы – 6-й и 7-й, с нулевыми значениями (т.н. фиктивные переменные).

В ячейках **B4:F10** вводятся результаты тестирования, а в ячейках **G4:H10** нулевые значения для фиктивных вакансий. Ячейки **B14:H20** являются изменяемыми. В ячейках **B21:H21** находятся суммы значений изменяемых столбцов, а в ячейках **I14:I20** – суммы значений соответствующих строк изменяемых ячеек. Целевая функция заносится в ячейку **J3**. Общая организация информации перед запуском вычислений представлена в табл. 24.

Таблица 24

Исходные данные для решения несимметричной задачи о назначении

			Баллы						
Претенденты	Вакансии								Сумма баллов
	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7		=СУММ ПРОИЗВ (B4:H10;B 14:H20)
P1	7	5	7	6	7	0	0		
P2	6	4	8	4	9	0	0		
P3	8	6	4	3	8	0	0		
P4	7	7	8	5	7	0	0		
P5	5	9	7	9	5	0	0		
P6	6	8	6	4	7	0	0		
P7	7	7	8	6	4	0	0		
	Xi1	Xi2	Xi3	Xi4	Xi5	Xi6	Xi7		
Xj1								=СУММ (B14:H14)	
Xj2								=СУММ (B15:H15)	
Xj3								=СУММ (B16:H16)	
Xj4								=СУММ (B17:H17)	
Xj5								=СУММ (B18:H18)	
Xj6								=СУММ (B19:H19)	
Xj7								=СУММ (B20:H20)	
	=СУММ (B14:B20)	=СУММ (C14:C20)	=СУММ (D14:D20)	=СУММ (E14:E20)	=СУММ (F14:F20)	=СУММ (G14:G20)	=СУММ (H14:H20)		

2. Запуск процедуры **Поиск решения**. Целевая функция: **J3**.

Значение целевой функции: **max**. Изменяемые ячейки: **B14:H20**.

Ограничения задачи:

B21:H21 = 1; I14:I20 = 1. Интерпретация этих ограничений состоит в том, что все свободные рабочие места должны быть заняты и все претенденты размещены по вакансиям.

B14:H20 – двоичные числа.

В окне **Параметры** установить **Линейная модель** и **Неотрицательные значения**.

3. Результат выполнения процедуры приводит к появлению в первоначальной таблице следующих результатов (табл. 25)

Таблица 25

Результаты решения									
			Баллы						
Претенденты	Вакансии								Сумма баллов
	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7		42
P1	7	5	7	6	7	0	0		
P2	6	4	8	4	9	0	0		
P3	8	6	4	3	8	0	0		
P4	7	7	8	5	7	0	0		
P5	5	9	7	9	5	0	0		
P6	6	8	6	4	7	0	0		
P7	7	7	8	6	4	0	0		
	Xi1	Xi2	Xi3	Xi4	Xi5	Xi6	Xi7		
Xj1	0	0	0	0	0	0	1	1	
Xj2	0	0	0	0	1	0	0	1	
Xj3	1	0	0	0	0	0	0	1	
Xj4	0	0	1	0	0	0	0	1	
Xj5	0	0	0	1	0	0	0	1	
Xj6	0	1	0	0	0	0	0	1	
Xj7	0	0	0	0	0	1	0	1	
	1	1	1	1	1	1	1		

Исходя из результатов найденного решения, претенденты Иванов и Карпов попадают на фиктивные вакансии и не принимаются на работу, претендент Дмитриев принимается на вакансию начальника отдела криоконсервации, Марский – на должность начальника отдела биологических основ аквакультуры, Корт – на должность начальника отдела экологической безопасности, Васильев – на должность начальника отдела естественных водоемов, Герцин – на должность начальника отдела инновационной аквакультуры.

Задачи для студентов (числовые данные цит. по Вуколову (2013)).

Задача 1. В конкурсе на занятие 5 вакансий в НИИ рыбного хозяйства участвуют 7 претендентов. Результаты тестирования даны в виде матрицы, представленной в таблице 26, тестирование проводилось по десятибалльной шкале. Определить, какого претендента и на какую вакансию следует принять, причем так, чтобы сумма баллов оказалась максимальной.

Вакансии: V1 Заместитель генерального директора по выполнению НИОКР; V2 Заместитель генерального директора по кризисному менеджменту; V3 Заместитель генерального директора по общим вопросам; V4 Заместитель генерального директора по техническому сопровождению научно-экспериментальных работ; V5 Заместитель генерального директора по административно-хозяйственной работе

Таблица 26

Матрица тестирования

	V1	V2	V3	V4	V5
P1	6	4	6	3	6
P2	4	5	3	6	7
P3	8	7	8	5	8
P4	5	5	6	8	4
P5	8	7	5	4	9
P6	9	5	6	6	4
P7	5	8	8	6	5

Задача 2. В конкурсе на занятие 5 вакансий в НИИ рыбного хозяйства участвуют 7 претендентов. Результаты тестирования даны в виде матрицы, представленной в таблице 27, тестирование проводилось по десятибалльной шкале. Определить, какого претендента и на какую вакансию следует принять, причем так, чтобы сумма баллов оказалась максимальной.

Вакансии: V1 руководитель лаборатории воспроизводство проходных и полупроходных рыб; V2 руководитель лаборатории генетики и радиологии; V3 руководитель лаборатории болезней рыб; V4 руководитель лаборатории гидрохимии; V5 руководитель лаборатории гидрологии.

Таблица 27

Матрица тестирования

	V1	V2	V3	V4	V5
P1	6	4	6	7	6
P2	7	5	6	5	7
P3	7	7	8	9	6
P4	6	4	3	8	6
P5	8	4	9	6	4
P6	4	8	6	5	7
P7	4	8	7	8	9

Задача 3. В конкурсе на занятие 5 вакансий в НИИ пресноводного рыбного хозяйства участвуют 7 претендентов. Результаты тестирования даны в виде матрицы, представленной в таблице 28, тестирование проводилось по десятибалльной шкале. Определить, какого претендента и на какую вакансию следует принять, причем так, чтобы сумма баллов оказалась максимальной.

Вакансии: V1 – начальник отдела биологических основ аквакультуры; V2 – начальник отдела инновационной аквакультуры; V3 – начальник отдела экологической безопасности; V4 – начальник отдела естественных водоемов; V5 – начальник отдела криоконсервации.

Таблица 28

Матрица тестирования

	V1	V2	V3	V4	V5
P1	4	7	5	7	7
P2	6	7	3	6	8
P3	3	4	5	8	7
P4	7	9	8	5	6
P5	4	6	4	8	4
P6	5	4	9	6	5
P7	7	5	4	7	4

Задача 4. В конкурсе на занятие 5 вакансий на заводе по воспроизводству и товарному выращиванию осетровых участвуют 7 претендентов. Результаты тестирования даны в виде матрицы, представленной в таблице 29, тестирование проводилось по десятибалльной шкале. Определить, какого претендента и на какую вакансию следует принять, причем так, чтобы сумма баллов оказалась максимальной.

Вакансии: V1- Главный рыбовод инкубационного цеха; V2- Главный рыбовод личиночного цеха; V3- Главный рыбовод УЗВ; V4-Главный рыбовод садкового цеха; V5- Главный рыбовод кормового цеха.

Таблица 29

Матрица тестирования

	V1	V2	V3	V4	V5
P1	5	7	5	8	6
P2	7	4	6	4	8
P3	5	8	7	8	7
P4	4	9	4	6	5
P5	7	8	3	5	8
P6	9	5	7	6	7
P7	7	6	6	5	7

Задача 5. В конкурсе на занятие 5 вакансий в отделе бухгалтерского учета и отчетности научного центра участвуют 7 претендентов. Результаты тестирования даны в виде матрицы, представленной в таблице 30, тестирование проводилось по десятибалльной шкале. Определить, какого претендента и на какую вакансию следует принять, причем так, чтобы сумма баллов оказалась максимальной.

Вакансии: V1- бухгалтер; V2- бухгалтер-кассир; V3- главный бухгалтер; V4- ведущий бухгалтер; V5- старший бухгалтер.

Таблица 30

Матрица тестирования

	V1	V2	V3	V4	V5
P1	6	4	6	3	6
P2	4	5	3	6	7
P3	5	7	8	6	5
P4	8	7	7	8	5
P5	5	6	8	7	9
P6	9	5	6	8	6
P7	8	5	6	4	7

Задача 6. В конкурсе на занятие 5 вакансий в Управлении науки и образования Федерального агентства по рыболовству участвуют 7 претендентов. Результаты

тестирования даны в виде матрицы, представленной в таблице 31, тестирование проводилось по десятибалльной шкале. Определить, какого претендента и на какую вакансию следует принять, причем так, чтобы сумма баллов оказалась максимальной.

Вакансии: V1 начальник отдела государственного заказа НИОКР; V2 начальник отдела экспедиционных исследований водных биоресурсов и подготовки ОДУ; V3 начальник отдела учебных заведений и профессиональной подготовки; V4 начальник отдела экологии рыбохозяйственных водоемов; V5 начальник ресурсного отдела.

Таблица 31

Матрица тестирования					
	V1	V2	V3	V4	V5
P1	6	4	6	3	6
P2	4	5	3	6	7
P3	5	7	8	6	5
P4	8	7	7	8	5
P5	5	6	8	7	9
P6	9	5	6	8	6
P7	8	5	6	4	7

Вопросы для семинаров и контрольных заданий:

1. Системный анализ – основные понятия, соотношение методологии с задачами оптимизации.
 2. Этапы разработки и эксплуатации модели с точки зрения системного моделирования.
 3. Оптимизация – определения; основные понятия теории оптимизации.
 4. Типовые постановки задач системного анализа.
 5. Технологические процессы аквакультуры – общая характеристика, особенности конкретных технологических процессов (возможно задание для подготовки реферата в соответствии с профилем магистерской программы либо направлением исследований в аспирантуре).
 6. Методы моделирования систем – характеристика и классификация.
 7. Общая схема системного моделирования процессов при разработке мероприятий по оптимизации.
 8. Общая модель для задач оптимизации, основные понятия.
 9. Общая классификация задач оптимизации в соответствии с постановкой проблем и методологией решения.
 10. Одномерная и многомерная оптимизация – примеры.
 11. Однокритериальная и многокритериальная оптимизация – примеры.
 12. Нелинейная оптимизация – постановка задач и методы решения с использованием пакетов прикладных программ.
 13. Линейное программирование – значение методологии, примеры применения.
 14. Линейное программирование – общая характеристика решаемых задач.
- Математическая постановка и общий вид математической модели.
15. Линейное программирование – графические методы решения.
 16. Линейное программирование – транспортные задачи и их специфика. Особенности решения с помощью табличного процессора (примеры).

17. Булева оптимизация. Технологии решения задачи с помощью электронных таблиц, примеры задач.
18. Задание для самостоятельной работы: доклад в реферативной форме – с описанием и общей характеристикой какой-либо компьютерной технологии, позволяющей решать задачи оптимизации (пакет прикладных программ, язык программирования либо его специализированные средства и т.д.).

**Учебно-методическое и информационное обеспечение
дисциплины представлено в рабочей программе дисциплины**