Филиал федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Астраханский государственный технический университет» в Ташкентской области Республики Узбекистан

Факультет высшего образования

Кафедра «Общая экология и экономика»

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИРОДНЫХ ПРОЦЕССОВ И АНТРОПОГЕННЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к практическим занятиям по дисциплине
«Математическое моделирование природных процессов
и антропогенных воздействий»
для студентов направления подготовки
05.04.06 Экология и природопользование

Ташкентская область, Кибрайский район – 2025

Составитель: д-р биол. наук, профессор кафедры Грушко М.П.

Рецензент: канд. биол. наук, доцент кафедры Обухова О.В.

Методические указания рассмотрены и одобрены на заседании кафедры «Общая экология и экономика»
Протокол от 21.02.2025 г. № 7

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ЭКОЛОГИИ: СТРУКТУРА, СПЕЦИФИКА, ВИДЫ

Цель работы: Научиться составлять и решать (аналитически и с помощью ПК) кинетические уравнения при моделировании процессов изменения численности популяций. Проводить анализ полученных решений, графически представлять результаты.

Теоретический материал. ***Моделирование*** есть процесс конструирования модели реальной системы и постановки экспериментов на этой модели с целью либо понять поведение системы, либо оценить различные стратегии, обеспечивающие функционирование данной системы. Теория замещения одних объектов (оригиналов) другими объектами (моделями) и исследования свойств объектов на их моделях называется ***теорией моделирования***.

Модель – представление группы объектов или идей в некоторой форме, отличной от их реального воплощения.

Основополагающим принципом моделирования является ***структурно-функциональное соответствие модели и исследуемого объекта.*** Реальному объекту может соответствовать много моделей, структура которых определяется прежде всего задачей исследования, т.е. в конечном счете субъективно (Шеннон Р.Ю., 1978).

Сходство модели с объектом, который она отображает, называется ***степенью изоморфизма***. Для того чтобы быть ***изоморфной*** (т. е. идентичной или сходной по форме), модель должна удовлетворять двум условиям:

1) должно существовать взаимно однозначное соответствие между элементами модели и элементами представляемого объекта.
2) должны быть сохранены точные соотношения или взаимодействия между элементами.

Степень изоморфизма модели относительна, и большинство моделей скорее гомоморфны, чем изоморфны. Под ***гомоморфизмом*** мы понимаем сходство по форме при различии основных структур, причем имеет место лишь поверхностное подобие между различными группами элементов модели и объекта. Гомоморфные модели являются результатом процессов ***упрощения*** и ***абстракции***.

Под ***упрощением*** подразумевается пренебрежение несущественными деталями или принятие предположений о более простых соотношениях. Например, мы часто предполагаем, что между двумя переменными имеет место линейная зависимость, хотя можем подозревать или даже знать наверное, что истинная зависимость между ними нелинейна.

Абстракция содержит или сосредоточивает в себе существенные качества или черты поведения объекта (вещи), но не обязательно в той же форме и столь детально, как это имеет место в оригинале (Шеннон Р.Ю., 1978).

Адекватность – соответствие модели объекту, т.е. модель должна с заданной степенью точности воспроизводить закономерности изучаемых явлений. Если результаты моделирования подтверждаются и могут служить основой для прогнозирования процессов, протекающих в исследуемых объектах, то говорят, что модель адекватна объекту. При этом адекватность модели зависит от цели моделирования и принятых критериев.

Границы применимости модели – условия, при которых выбранная модель адекватна изучаемому объекту. Границы применимости определяются теми допущениями, которые делаются при составлении модели. Как правило, чем больше допущений, тем уже границы применимости (Недорезов Л.В., 1997).

В качестве одного из первых признаков классификации видов моделирования можно выбрать ***степень полноты модели*** и разделить модели в соответствии с этим признаком на ***полные***, ***неполные*** и ***приближенные***. В основе полного моделирования лежит полное подобие, которое проявляется как во времени, так и в пространстве. Для неполного моделирования характерно неполное подобие модели изучаемому объекту. В основе приближенного моделирования лежит приближенное подобие, при котором некоторые стороны функционирования реального объекта не моделируются совсем.

Статическое моделирование служит для описания поведения объекта в какой-либо момент времени, а ***динамическое моделирование*** отражает поведение объекта во времени (рис.1).

В зависимости от формы представления объекта можно выделить мысленное и реальное моделирование.

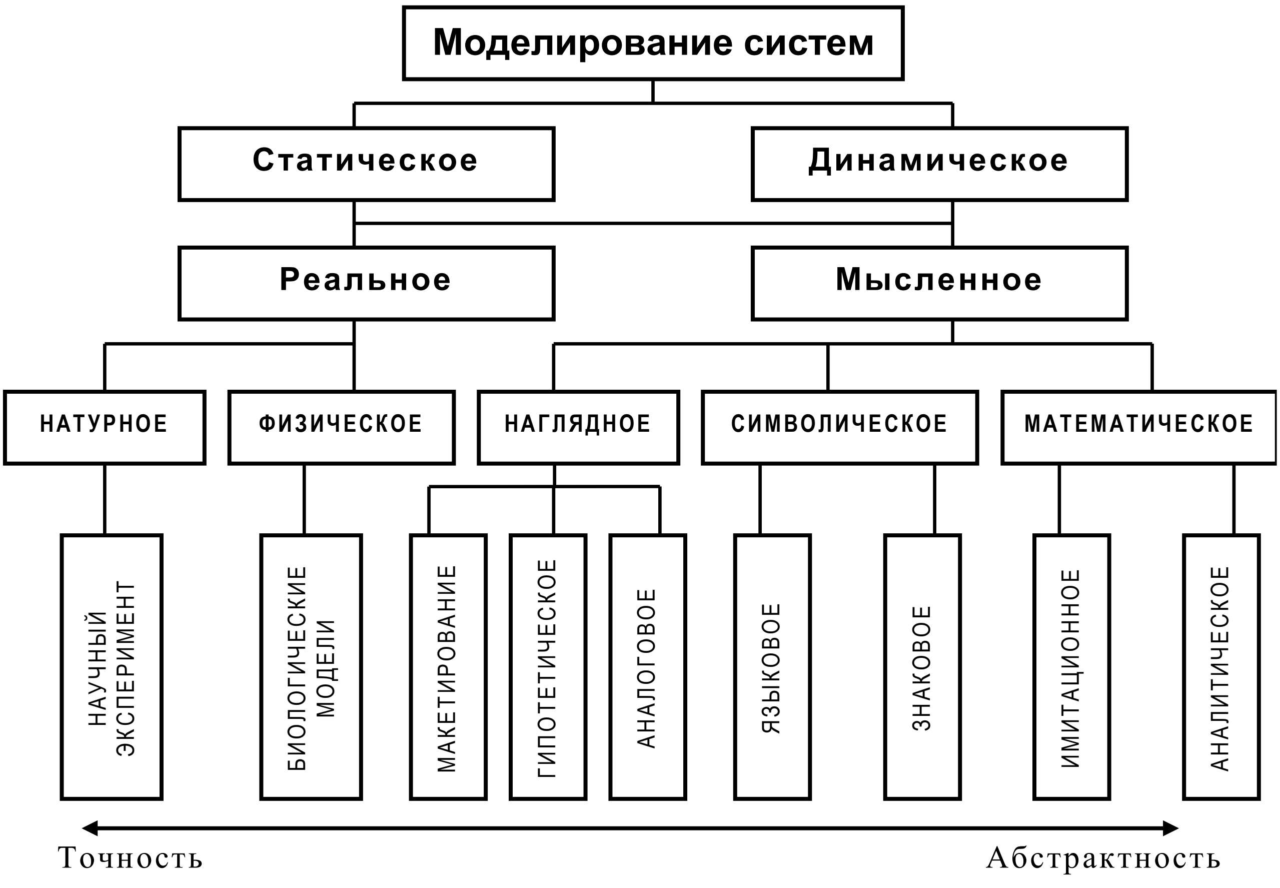


Рис. 1. Классификация видов моделирования систем

При ***реальном моделировании*** используется возможность исследования различных характеристик либо на реальном объекте целиком, либо на его части. Такие исследования могут проводиться как на объектах, работающих в нормальных режимах, так и при организации специальных режимов для оценки интересующих исследователя характеристик (при других значениях переменных и параметров, в другом масштабе времени и т. д.). Реальное моделирование является наиболее адекватным, но при этом его возможности с учетом особенностей реальных объектов ограничены.

Натурным моделированием называют проведение исследования на реальном объекте с последующей обработкой результатов эксперимента на основе теории подобия. При функционировании объекта в соответствии с поставленной целью удается выявить закономерности протекания реального процесса.

Научный эксперимент характеризуется широким использованием средств автоматизации проведения, применением весьма разнообразных средств обработки информации, возможностью вмешательства человека в процесс проведения эксперимента. Отличие эксперимента от реального протекания процесса заключается в том, что в нем могут появиться отдельные критические ситуации и определяться границы устойчивости процесса. В ходе эксперимента вводятся новые факторы и возмущающие воздействия в процесс функционирования объекта.

Другим видом реального моделирования является ***физическое,*** отличающееся от натурного тем, что исследование проводится на установках, которые сохраняют природу явлений и обладают физическим подобием. В процессе физического моделирования задаются некоторые характеристики внешней среды и исследуется поведение либо реального объекта, либо его модели при заданных или создаваемых искусственно воздействиях внешней среды. Отличительная особенность физических и масштабированных моделей то, что модель «выглядит» подобно моделируемому объекту (Советов Б. Я., Яковлев С. А., 2001).

Экологи широко применяют **«*биологические модели*»**, т.е. создаваемые в лаборатории экосистемы из настоящих организмов (например, *Paramecium, Tribolium, Daphnia, Drosophila*) – эти модели весьма полезны, представляя собой объект, промежуточный между математическими моделями и подлинными экосистемами. Они служат главным образом не для проверки выводов, сделанных на основе математических моделей, а для того, чтобы наметить те явления, которые мог бы объяснить математик (Смит Дж.М., 1976).

Мысленное моделирование часто является единственным способом моделирования объектов, которые существуют вне условий, возможных для их физического создания. Например, на базе мысленного моделирования могут быть проанализированы многие ситуации микромира, которые не поддаются физическому эксперименту. Мысленное моделирование может быть реализовано в виде наглядного, символического и математического.

При ***наглядном моделировании*** на базе представлений человека о реальных объектах создаются различные наглядные модели, отображающие явления и процессы, протекающие в объекте. В основу ***гипотетического моделирования*** исследователем закладывается некоторая гипотеза о закономерностях протекания процесса в реальном объекте, которая отражает уровень знаний исследователя об объекте и базируется на причинно-следственных связях между входом и выходом изучаемого объекта. Гипотетическое моделирование используется, когда знаний об объекте недостаточно для построения формальных моделей.

Аналоговое моделирование основывается на применении аналогий различных уровней. Аналоговыми моделями являются графики, структурные схемы и т.п.

Существенное место при мысленном наглядном моделировании занимает ***макетирование.*** Мысленный макет может применяться в случаях, когда протекающие в реальном объекте процессы не поддаются физическому моделированию, либо может предшествовать проведению других видов моделирования.

Символическое моделирование представляет собой искусственный процесс создания логического объекта, который замещает реальный и выражает основные свойства его отношений с помощью определенной системы знаков или символов.

При введении условных обозначений отдельных понятий – знаков, а также определенных операций между этими знаками, реализуется ***знаковое моделирование.*** С помощью знаков можно отображать набор понятий – составлять отдельные цепочки из слов и предложений. Используя операции объединения, пересечения и дополнения теории множеств, можно в отдельных символах дать описание какого-то реального объекта.

В основе ***языкового моделирования*** лежит некоторый ***тезаурус***. Тезаурус – словарь, который очищен от неоднозначности, т. е. в нем каждому слову может соответствовать лишь единственное понятие.

Одна из наиболее полезных и определенно наиболее употребительных форм моделей – это ***математическая***, выражающая посредством системы уравнений существенные черты изучаемых реальных систем или явлений. Математическое моделирование для исследования характеристик процесса функционирования систем можно разделить на аналитическое, имитационное и комбинированное.

Для ***аналитического моделирования*** характерно то, что процессы функционирования элементов системы записываются в виде некоторых функциональных соотношений (алгебраических, интегро-дифференциальных, конечно-разностных и т. п.) или логических условий. Аналитическая модель может быть исследована следующими методами: а) аналитическим, когда стремятся получить в общем виде явные зависимости для искомых характеристик; б) численным, когда, не умея решать уравнений в общем виде, стремятся получить числовые результаты при конкретных начальных данных; в) качественным, когда, не имея решения в явном виде, можно найти некоторые свойства решения (например, оценить устойчивость решения).

При ***имитационном моделировании*** реализующий модель алгоритм воспроизводит процесс функционирования системы во времени, причем имитируются элементарные явления, составляющие процесс, с сохранением их логической структуры и последовательности протекания во времени, что позволяет по исходным данным получить сведения о состояниях процесса в определенные моменты времени, дающие возможность оценить характеристики системы (Советов Б. Я., Яковлев С. А., 2001).

В экологии имитационные модели, или имитации, зачастую применяются для анализа частных случаев и имеют практическую направленность. Аналитические, или качественные модели – это описания, имеющие чисто теоретическое значение: положения, затрагивающие как экосистемы в целом, так и отдельные виды в определенные отрезки времени, причем эти положения должны быть применимы не только к какому-то одному, а ко многим различным видам. При этом хорошая имитация содержит как можно больше частных деталей, хорошая аналитическая модель – как можно меньше (Смит Дж.М., 1976).

Математическая модель представляет собой комбинацию следующих составляющих.

- ***Компоненты*** – составные части, которые при соответствующем объединении образуют систему. Иногда мы считаем компонентами также элементы системы или ее подсистемы.
- ***Переменные*** – значения, определяемые видом данной функции. Переменные могут быть: экзогенные (входные) – результат воздействия внешних причин; эндогенные (переменные состояния, выходные переменные) – порождаются системой.
- ***Параметры*** – величины, выбираемые произвольно. После установления параметров они являются постоянными величинами, не подлежащими изменению. Например: $y = a\,x$. Установим $a = 3$, $y = 3x$ – заданная функция.
- ***Функциональные зависимости*** – описывают поведение переменных и параметров в пределах компонента или выражают соотношение между компонентами системы.
- ***Ограничения*** – представляют собой устанавливаемые пределы изменения значений переменных или ограничивающие условия распределения и расходования тех или иных средств (энергии, запасов времени и т.п.). Они могут вводиться разработчиком (искусственные ограничения), либо самой системой вследствие присущих ей свойств (естественные ограничения) (Шеннон Р.Ю., 1978).
- ***Целевые функции*** – задачи, включенные в модель с целью ее оптимизации, т.е. получения определенного результата (Ляпунов А.А., Багриновская Г.П., 1975)..

Ляпунов Алексей Андреевич (1975) предложил классифицировать математические модели 1) по естественнонаучным задачам; 2) по уровню организации живой природы, на котором выделяется система для моделирования; 3) по используемым математическим методам.

Первая шкала может включать в себя следующие разделы:

- управление;
- оптимизация;
- прогнозирование и т.п.

В основе второй лежат уровни организации живой природы по Н.В. Тимофееву-Ресовскому:

- клетки и субклеточные структуры;
- организм, система его органов и их строение;
- популяции как в генетическом, так и в поведенческом аспекте;
- биологические сообщества от элементарных биоценозов до биосферы в целом.

По отношению к популяциям это моделирование процессов передачи и видоизменения наследственной информации в масштабах популяции, модели поведения особи в пределах популяции, поведенческое структурирование популяций: семьи, стада и т.п. При изучении сообществ речь идет о математических моделях балансовых соотношений для укрупняющихся сообществ вплоть до биосферы в целом. При построении этой иерархии моделей нужно стремиться к тому, чтобы объекты моделирования низшего уровня служили элементами моделируемых систем высшего уровня.

В основе классификации используемых математических методов (табл.1) лежит выявление характерных черт моделей, которые являются ключевыми для установления связи с теми или другими математическими дисциплинами. Например, из следующих пар типа тезис – антитезис каждая конкретная модель обладает одним из признаков каждой пары.

Таблица 1. Классификация математических моделей по используемым методам

Тезис	***Антитезис***
Детерминированные	Вероятностные (стохастические)
Время дискретное	Время непрерывное
Интервал времени ограниченный	Интервал времени неограниченный (асимптотические подходы)
Бескоординатные	Координатные
Без последствий (марковские)	С последействиями (немарковские)
Без управления	С управлением
Модели, перестраивающиеся в зависимости от функционирования (например, с лимитирующими факторами)	Модели, аналитическая форма которых остается неизменной
Модели, обладающие некоторой «гладкостью», функционирование которых допускает простое аналитическое описание	Модели, характер функционирования которых резко меняется в зависимости от условий

Математические модели систем играют значительную роль в понимании их функционирования и физической сущности, что заключается в следующем:

1. Гипотезы, выраженные математически, могут служить количественным описанием экологической проблемы и тем самым способствовать более углубленному ее пониманию.

2. Требования, предъявляемые моделью к математической завершенности описания, позволяют построить определенную концептуальную основу и с ее помощью четко ограничить те области, где знание проблемы еще не достаточно, т.е. стимулируют возникновение новых идей и проведение экспериментальных исследований.

3. Математическая модель части подсказывает способ представления результатов научных исследований в форме, удобной для исследования на практике.

4. Благодаря модели может быть оценена количественно экономическая эффективность результатов научных исследований, что стимулирует оперативное их внедрение в производство.

5. Математическое моделирование, с помощью которого можно получить ответ на тот или иной специальный вопрос, в также сделать обоснованный выбор из ряда альтернативных стратегий, дает возможность сократить объем продолжительных и дорогостоящих экспериментальных работ, выполнение которых было бы необходимым при отсутствии соответствующих моделей.

6. При исследовании сложных много компонентных объектов модель позволяет объединить разрозненные знания, касающиеся отдельных частей такой системы, и выработать концепцию ее поведения как единого целого.

7. С помощью модели можно выбрать наиболее рациональную стратегию и тактику реализации исследовательских программ, обеспечивая необходимую детальность изучения специальных вопросов и кооперацию отдельных направлений исследования.

8. Математическая модель – мощное средство обобщения разнородных данных об объекте, позволяющее осуществлять как интерполяцию (восстановление недостающей информации о прошлом), так и экстраполяцию (прогнозирование будущего поведения объекта).

9. Хорошо сконструированная модель позволяет наиболее полно использовать данные, получение которых, учитывая растущие требования к точности, обходится дорого.

10. Прогнозирующая способность модели может быть направлена на достижение самых разнообразных целей – планирования, оценки эффективности, прогнозирования и т.д. (Гринин А.С. с соавт., 2003).

Одним из основных элементов в построении математических моделей динамики численности популяций является учет баланса в изменении соотношений различных групп в структуре популяции под воздействием факторов различной природы. В основе построения балансовых соотношений, как правило, лежат простые, очевидные соображения, связанные с тем, что, например, прирост численности хищников связан со скоростью их потребления жертв, но при этом потреблении неизбежна потеря биомассы и, следовательно, число народившихся хищников не может превышать числа потребленных жертв. С данной территории не может мигрировать в соседние области особей больше, чем имеется и так далее.

Балансовые соображения лежат в основе вывода практически всех математических моделей динамики численности популяции. А именно: предположим, что динамику численности изолированной популяции мы хотим описать с помощью только одного уравнения, пренебрегая различными внутрипопуляционными структурами (возрастной, фазовой, половой, генетической; социальной и так далее) и принимая во внимание только суммарную численность популяции *N(t)* в момент времени *t*.

Поскольку априори предполагается, что нет никакого внешнего воздействия (т. е. хищников, паразитов, конкурентов и других), внешние условия предполагаются стационарными, то баланс численности популяции складывается из следующих основных процессов: рождаемости, смертности особей, иммиграции и эмиграции.

$$\frac{dN}{dt} = R - S + I - E\ ,$$

где $\frac{dN}{dt}$ – скорость изменения численности популяции; R – скорость размножения, S – скорость естественной гибели, I – скорость иммиграции, E – скорость эмиграции. Величины в правых частях уравнения – нелинейные функции. Положительные члены описывают прибыль компонента, отрицательные – его убыль (Недорезов Л.В., 1997).

Задание 1. Выберите один, наиболее точный ответ:

1. Основополагающим принципом моделирования является … .
   а) раскрытие важных причинно-следственных связей;
   б) структурно-функциональное соответствие модели и исследуемого объекта;
   в) измеряемость структурных элементов модели;
   г) нахождение варианта течения процесса, при котором выбранный критерий принимает оптимальное значение.

2. Составные части модели, которые при соответствующем объединении образуют систему, называются … .
   а) параметры ; г) функциональные зависимости;
   б) переменные; д) целевые функции;
   в) компоненты; е) ограничения.

3. Ограничения, которые вводятся в модель самой системой вследствие присущих ей свойств, называются … .
   а) искусственными; г) функциональными;
   б) ограничения состояния; д) естественными;
   в) целевыми; е) оптимальными.

4. Ограничения, которые вводятся в модель исследователем с целью решения определенных практических задач, называются … .

а) искусственными;
б) ограничения состояния;
в) целевыми;
г) функциональными;
д) естественными;
е) оптимальными.

5. Раздел классификации математических моделей по уровню организации живой природы – … .
   а) управление;
   б) популяция ;
   в) дискретное время модели;
   г) координатные характеристики;
   д) оптимизация;
   е) прогнозирование.

6. Раздел классификации математических моделей по естественнонаучным задачам – … .
   а) клетка;
   б) популяция ;
   в) дискретное время модели;
   г) координатные характеристики;
   д) управление;
   е) биосфера.

7. Величины математической модели, устанавливаемые на основании эмпирического материала и в дальнейшем не изменяющиеся, называются … .
   а) ограничения;
   б) переменные;
   в) компоненты;
   г) параметры;
   д) целевые функции;
   е) функциональные зависимости.

8. Величины математической модели, значение которых определяется видом присутствующих функциональных зависимостей, называются … .
   а) параметры ;
   б) константы;
   в) компоненты;
   г) переменные;
   д) целевые функции;
   е) ограничения.

9. «Биологические модели» – это … .
   а) создаваемые в лаборатории экосистемы из настоящих организмов;
   б) математические модели, описывающие биологические системы;
   в) модели, задачей которых является определение численности живых объектов;
   г) модели, связанные с определением превращений вещества и энергии в пищевых цепях;
   д) модели, в которых по крайней мере один из компонентов является живым объектом;
   е) экспериментальные ситуации, воссоздаваемые в реальных биогеоценозах.

10. Из предложенных моделей динамической физической моделью в уменьшенном масштабе является … .
   а) манекен;
   б) график;
   г) электрическая железная дорога;
   д) модель атома;

в) логарифмическая линейка; е) компьютерная программа.

11. Из предложенных моделей статической физической моделью в масштабе 1 : 1 является … .
   а) манекен; г) электрическая железная дорога;
   б) график; д) модель атома;
   в) логарифмическая линейка; е) компьютерная программа.

12. Какая из предложенных моделей является аналоговой моделью?
   а) манекен; г) электрическая железная дорога;
   б) барокамера; д) модель атома;
   в) аквариум; е) компьютерная программа.

Задание 2. Предложите ряд разноплановых моделей, кратко их описав, для изучения биогеоценоза озера.

ПОСТРОЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ В MS. EXCEL

Цель работы: Научиться представлять в Ms. Excel кинетические уравнения при моделировании процессов изменения численности популяций. Проводить анализ полученных уравнений, графически представлять результаты.

Теоретический материал. В графическом редакторе уравнения динамики популяций представляют в виде системы абсолютных и относительных ссылок, по которым строится точечная диаграмма, позволяющая отображать зависимость изменения численности (ось ординат) от времени (ось абсцисс).

На листе выделяют три области:

1) область исходных данных (задаваемых переменных и параметров);

2) «тело модели» (в виде ссылок на исходные данные и преобразований с ними);

3) диаграмма (точечная), отображающая состояние ячеек, занятых «телом модели».

Исходные данные следует вводить с подробными комментариями, отмечая как буквенные обозначения модели, так и их расшифровку. В комментариях при необходимости указывать диапазон возможного варьирования параметра (если он ограничен). Ячейки, которые будут изменяться, необходимо визуально выделять (на рисунке 2 использована заливка).

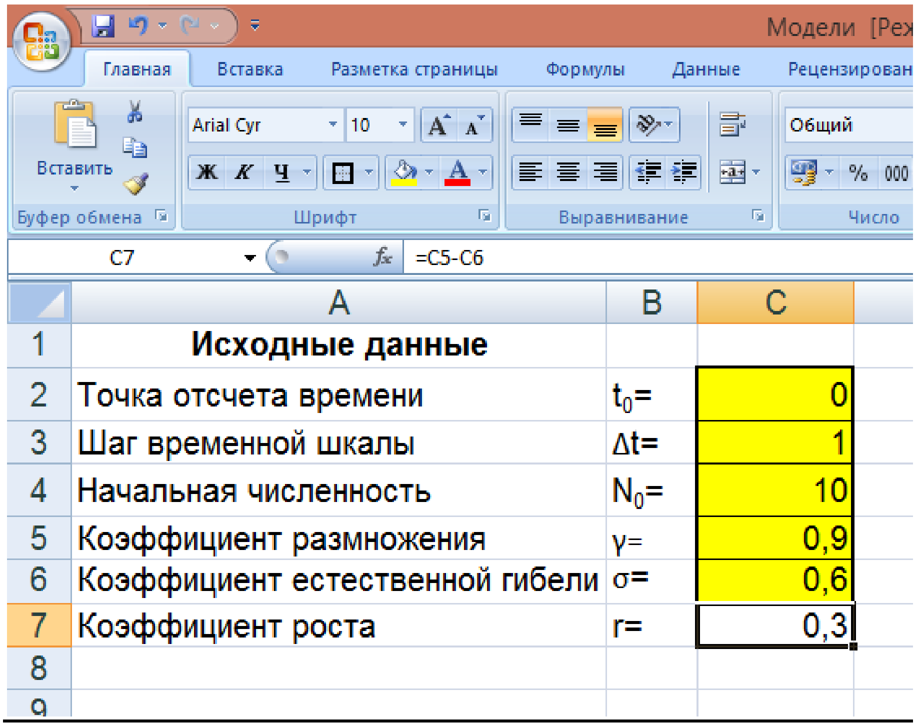
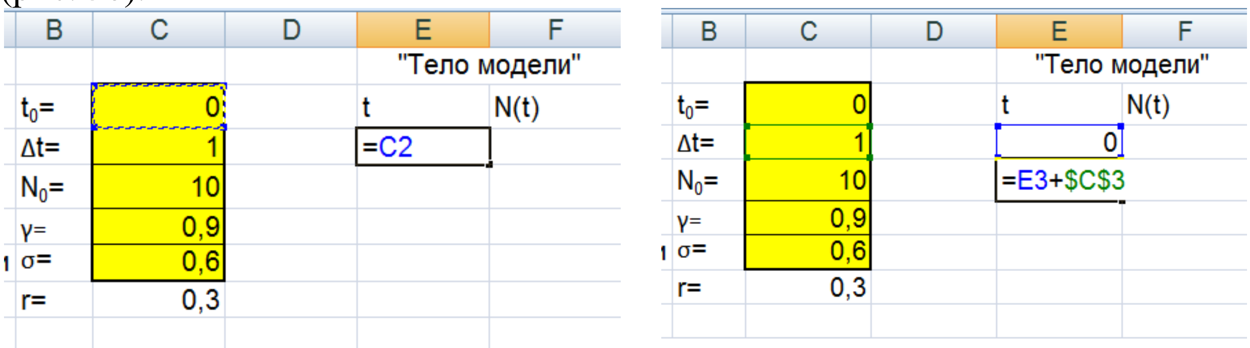


Рис. 2. Исходные данные модели

«Тело модели» включает временную шкалу и зависимое от нее изменение численности популяции. Временная шкала содержит первую ячейку со ссылкой на значение точки отсчета времени (рис. 3а), вторую ячейку – с относительной ссылкой на первую ячейку плюс абсолютная ссылка на шаг временной шкалы (рис. 3б).



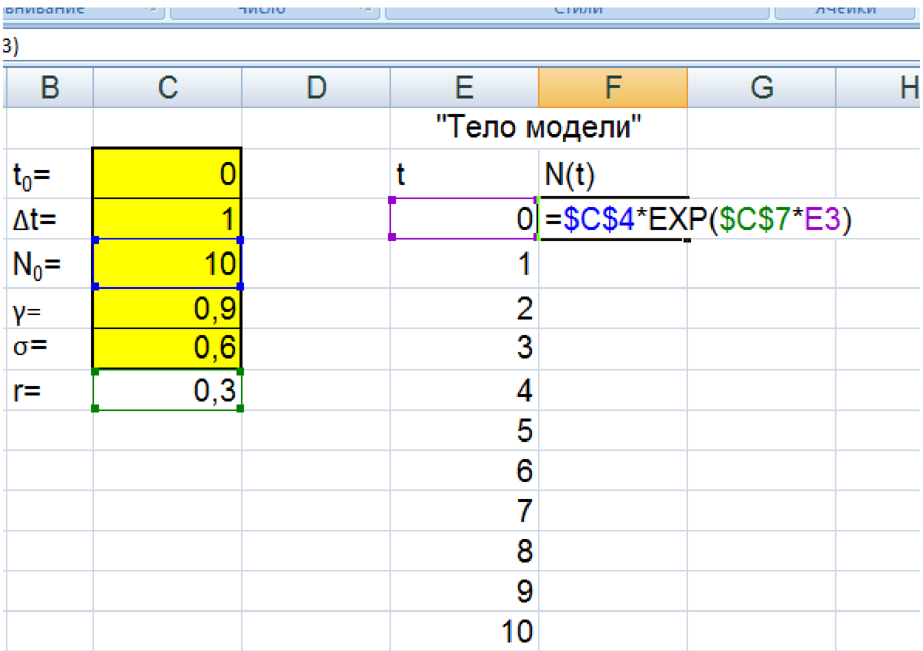
а б

Рис. 3. Временная шкала

Нижнюю ячейку (Е4) необходимо растянуть вниз, задав необходимый (по желанию) временной отрезок.

Изменения численности вносят в соседний с временной шкалой столбец, используя формулу модели (рис. 4).

$$N(t) = N_0 \cdot e^{rt}.$$

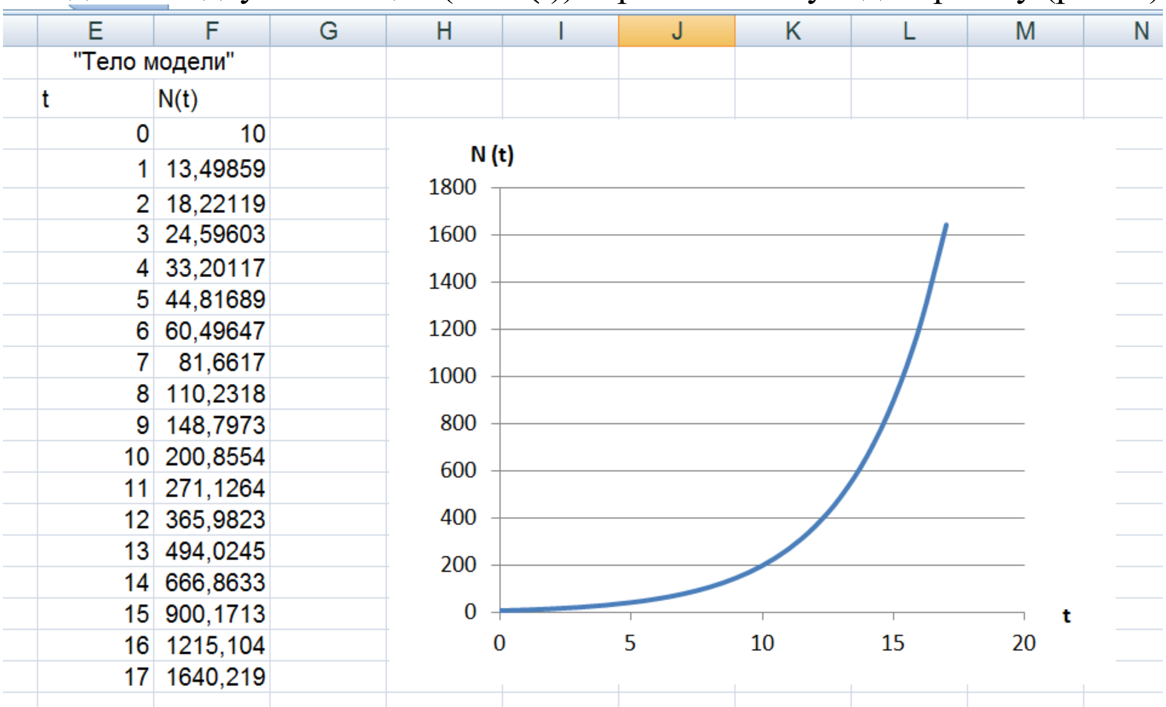


	B	C	D	E	F	G	H
				"Тело модели"			
	t_0=	0		t	N(t)		
	Δt=	1		0	=C4*EXP(C7*E3)		
	N_0=	10		1			
	γ=	0,9		2			
	σ=	0,6		3			
	r=	0,3		4			
				5			
				6			
				7			
				8			
				9			
				10			

Рис. 4. Изменения численности в модели Мальтуса

Ячейку с внесенной формулой (F3) растягиваю вниз соответственно заданной временной шкале.

По данным двух столбцов (t и $N(t)$) строят точечную диаграмму (рис. 5).



E	F
"Тело модели"	
t	N(t)
0	10
1	13,49859
2	18,22119
3	24,59603
4	33,20117
5	44,81689
6	60,49647
7	81,6617
8	110,2318
9	148,7973
10	200,8554
11	271,1264
12	365,9823
13	494,0245
14	666,8633
15	900,1713
16	1215,104
17	1640,219

Рис. 5. Графическое представление модели

<u>Модель Мальтуса.</u> Пусть существует некоторая популяция одного вида (микроорганизмы, зайцы и т.п.), в которой происходят жизненные процессы во всем их многообразии.

Основные допущения моделирования:

1. Существуют только процессы размножения и естественной гибели, скорости которых пропорциональны численности особей в данный момент времени.

2. Не учитываем биохимические, физиологические процессы.

3. Нет борьбы между особями за место обитания, за пищу (бесконечно большое пространство и количество пищи).

4. Рассматриваем только одну популяцию, нет хищников.

Введем величины:

N – численность популяции в момент t;

R – скорость размножения, γ – коэффициент размножения;

S – скорость естественной гибели, σ – коэффициент естественной гибели;

$\frac{dN}{dt}$ – скорость изменения численности популяции, r – коэффициент роста.

Тогда $R = \gamma N$, $S = -\sigma N$.

Составим дифференциальное уравнение баланса: изменение численности особей в единицу времени определяется количеством рожденных за это время и умерших:

$$\frac{dN}{dt} = (\gamma - \sigma)N, \quad \text{или} \quad \frac{dN}{dt} = rN$$

Приняв начальные условия при t = 0 численность особей $N = N_0$, получим:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{rt}.$$

Задание 1. Рассчитайте с помощью компьютера $N(t)$. Оцените из графиков время $T_{0,5}$, когда численность особей изменится в 2 раза по сравнению с первоначальной. Сопоставьте с расчетными величинами:

$$T_{0,5} = \frac{\ln 2}{|r|}.$$

Постройте график зависимости $T_{0,5}$ ($|r|$).

Задание 2. Проанализируйте поведение системы при изменении коэффициента роста $r > 0$ ($\gamma > \sigma$). Заполните таблицу:

Параметры	γ, 1/час	σ, 1/час	r, 1/час	N_0	$T_{0,5}$
1 система	0,9	0,6		50	
2 система	1,0	0,6		50	
3 система	1,1	0,6		50	

Постройте графики $N(t)$. Кривые $N(t)$ для разных γ должны быть представлены все на одном рисунке, соответственно для разных σ – на другом, для разных N_0 – на третьем.

Задание 3. Проанализируйте поведение системы при изменении коэффициента роста $r < 0$ ($\gamma < \sigma$). Заполните таблицу:

Параметры	γ, 1/час	σ, 1/час	r, 1/час	N_0	$T_{0,5}$
1 система	0,5	0,6		50	
2 система	0,4	0,6		50	
3 система	0	0,6		50	

Постройте графики $N(t)$.

Задание 4. Проанализируйте поведение системы при изменении коэффициента роста r = 0 ($\gamma = \sigma$). Заполните таблицу:

Параметры	γ, 1/час	σ, 1/час	r, 1/час	N_0	$T_{0,5}$
Система	0,6	0,6		50	

Постройте график $N(t)$.

Задание 5. Проанализируйте поведение системы при изменениях начальной численности особей N_0. Заполните таблицу:

Параметры	γ, 1/час	σ, 1/час	r, 1/час	N_0	$T_{0,5}$
1 система	0,8	0,6		10	
2 система	0,8	0,6		50	
3 система	0,8	0,6		100	

Постройте графики $N(t)$. Результаты анализа (задания 1-5) представьте в виде вывода.

Теоретический материал. Модель Ферхюльста – Перля. Усложним предыдущую модель. Среди допущений, снимем допущение 3. Пусть существует борьба между особями, например, за место обитания, тем самым добавляется дополнительный источник гибели. Считая, что скорость гибели за счет конкуренции между особями пропорциональна вероятности встречи двух особей, можно записать

$$\mathrm{S} = -\,\delta N \cdot N - \sigma N,$$

где δ – коэффициент пропорциональности. Тогда уравнение баланса численности особей:

$$\frac{dN}{dt} = (\gamma - \sigma)N - \delta N^2, \quad \text{или} \quad \frac{dN}{dt} = rN - \delta N^2$$

Решением этого неопределенного дифференциального уравнения станет

$$N(t) = \frac{N_0 \cdot r}{(r - \delta \cdot N_0) \cdot e^{-rt} + \delta \cdot N_0}$$

при $t \to \infty$ $N \to K = r / \delta$.

Чем меньше вероятность внутривидовой конкуренции, тем быстрее растет численность особей.

Задание 6. Рассчитайте с помощью компьютера $N(t)$. Оцените из графиков характерные величины процесса, сопоставьте с расчетными величинами:

а) Стационарное значение K:

$$K = r / \delta.$$

Постройте графики $K(r)$, $K(\delta)$.

б) Характерное время $T_{0,9}$, когда численность популяции составляет N = 0,9 K (т.е. практически выходит на стационарный уровень).

Постройте графики $T_{0,9}(N_0)$, $T_{0,9}(r)$, $T_{0,9}(\delta)$.

в) параметры точки перегиба – время $t_к$ и численность особей $N_к$, когда проявляется конкуренция их между собой. Для этого по графику оцените $N_к$, сравните с теоретическим значением:

$$N_к = \frac{1}{2}K = \frac{r}{2\delta}.$$

По графику найдите $t_к$.

Постройте графики $N_к(N_0)$, $N_к(r)$, $N_к(\delta)$; $t_к(N_0)$, $t_к(r)$, $t_к(\delta)$.

Задание 7. Проанализируйте поведение системы при изменении коэффициента роста r. Заполните таблицу:

Параметры	r, 1/час	δ, 1/час	N_0	K	$N_к$	$t_к$
1 система	2,2	0,001	20			
2 система	1,6	0,001	20			
3 система	1	0,001	20			

Постройте графики $N(t)$. Кривые $N(t)$ для каждого вида параметров должны быть представлены все на одном рисунке.

Задание 8. Проанализируйте поведение системы при изменении коэффициента роста δ (вероятности конкуренции). Заполните таблицу:

Параметры	r, 1/час	δ, 1/час	N_0	K	$N_к$	$t_к$
1 система	0,4	0,001	20			
2 система	0,4	0,003	20			
3 система	0,4	0,01	20			
4 система	0,4	0,02	20			

Задание 9. Проанализируйте поведение системы при изменении начальной численности особей N_0. Заполните таблицу:

Параметры	r, 1/час	δ, 1/час	N_0	K	$N_к$	$t_к$
1 система	0,6	0,01	60			
2 система	0,6	0,01	40			
3 система	0,6	0,01	20			
4 система	0,6	0,01	10			

Результаты анализа (задания 6-9) представьте в виде вывода.

МОДЕЛЬ ЛЕСЛИ И ЕЕ ВОЗМОЖНОСТИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ СТРУКТУРЫ ПОПУЛЯЦИИ

Цель работы: ознакомиться с моделью Лесли, научиться моделировать внутрипопуляционную структуру.

Теоретический материал. Детализация возрастной структуры популяций приводит к классу моделей, впервые предложенных Лесли, (1945, 1948).

Пусть ресурсы питания не ограничены. Размножение происходит в определенные моменты времени t_1, t_2, t_3, … , t_n. Пусть популяция содержит n возрастных групп. Тогда в каждый фиксированный момент времени (например, t_0) популяцию можно охарактеризовать вектор-столбцом:

$$X(t_0) = \begin{vmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \dots \\ x_n(t_0) \end{vmatrix}$$

Вектор $X(t_1)$, характеризующий популяцию в следующий момент времени, например, через год, связан с вектором $X(t_0)$ через матрицу перехода L:

$$X(t_1) = LX(t_0)$$

Установим вид этой матрицы. Из всех возрастных групп выделим те, которые производят потомство. Пусть их номера будут k, k+1, ... , k+p.

Предположим, что за единичный промежуток времени особи i-й группы переходят в группу i+1, от групп k, k+1,..., k+p появляется потомство, а часть особей от каждой группы погибает.

Потомство, которое появилось за единицу времени от всех групп, поступает в группу 1.

$$x_1(t_1) = \sum_{i=k}^{k+p} a_1 x_1(t_0)$$

Вторая компонента получается с учетом двух процессов. Первый – переход особей, находившихся в момент в первой группе, во вторую. Второй процесс – возможная гибель части из этих особей. Поэтому вторая компонента $x_2(t_1)$ равна не всей численности $x_1(t_0)$, а только некоторой ее части $\beta_1 x_1(t_0)$, где $0 < \beta_1 < 1$.

Аналогично получаются третья компонента $\beta_2 x_2(t_0)$ и все остальные.

Предположим, что все особи, находившиеся в момент t_0 в последней возрастной группе к моменту t_1 погибнут. Поэтому последняя компонента вектора $X(t_1)$ составляется лишь из тех особей, которые перешли из предыдущей возрастной группы.

$$x_n(t) = \beta_{n-1} x_{n-1}(t), \qquad 0 < \beta_n < 1.$$

Коэффициенты для каждой группы имеют следующий смысл:

a – коэффициент рождаемости, β – коэффициент выживания. Вектор численностей возрастных групп в момент времени t_1 представим в виде:

$$X(t_1) = \begin{vmatrix} x_1(t_1) \\ x_2(t_1) \\ \dots \\ x_n(t_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_{i=k}^{k+p} a_1 x_1(t_0) \\ \beta_1 x_1(t_0) \\ \dots \\ \beta_{n-1} x_{n-1}(t_0) \end{vmatrix}$$

Вектор $X(t_1)$ получается умножением вектора $X(t_0)$ на матрицу

$$L = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_i & a_{i+1} & \dots & 0 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \beta_{n-1} & 0 \end{vmatrix}$$

По диагонали матрицы стоят нули, под диагональными элементами β коэффициенты выживания, на первой строке стоят члены, характеризующие число особей, родившихся от соответствующих групп. Все остальные элементы матрицы равны нулю.

$$X(t_1) = LX(t_0) = L^1 X(t_0)$$
$$X(t_2) = LX(t_1) = LLX(t_0) = L^2 X(t_0)$$
$$X(t_i) = L^i X(t_0)$$

Таким образом, зная структуру матрицы L и начальное состояние популяции – вектор-столбец $X(t_0)$, – можно прогнозировать состояние популяции в любой наперед заданный момент времени.

Главное собственное число матрицы L дает скорость, с которой размножается популяция, когда ее возрастная структура стабилизировалась.

Задание. Постройте модель Лесли средствами Ms. Excel для следующих начальных данных:

Возрастные классы	1	2	3	4	5	6	7
Начальные численности	10	10	10	10	10	10	10
Повозрастная рождаемость	0	0	0	0,2	0,4	0,4	0,05
Матрица выживания	0,74	0	0	0	0	0	0
	0	0,9	0	0	0	0	0
	0	0	0,9	0	0	0	0
	0	0	0	0,9	0	0	0
	0	0	0	0	0,8	0	0
	0	0	0	0	0	0,6	0
	0	0	0	0	0	0	0

ТОКСИКОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ЕЕ ВАРИАЦИИ

Цель работы: Познакомиться с задачей моделирования кинетики токсикологических веществ в организме. Научиться составлять простейшие кинетические уравнения, описывающие токсикологическую модель и анализировать их решение.

Теоретический материал. Фармакокинетическая модель описывает кинетику (изменение во времени) распределения введенных в организм ксенобиотиков (лекарств, индикаторов, токсических веществ).

При составлении дифференциальных уравнений, описывающих кинетику распределения ксенобиотиков, используются следующие, известные из физиологии, факты. Концентрация вещества в крови зависит: 1) от всасывания вещества в кровеносное русло (константа всасывания k_1) при внесосудистом введении; 2) от транспорта лекарства из крови в орган-мишень и обратно (константы k_{23} и k_{32}); 3) от удаления вещества из крови и разрушения, его инактивации (константа k_4).

Соответствующая схема показана на рисунке 6.

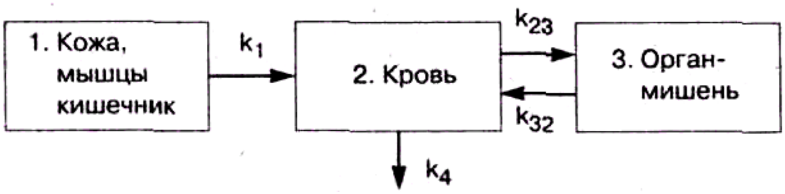


Рис. 6. Схема кинетики ксенобиотика

Каждый процесс, изображенный стрелкой, можно представить в виде химической реакции первого порядка (скорость реакции пропорциональна концентрации реагирующего вещества)

$$\frac{dC_1}{dt} = -k_1 C_1$$

$$\frac{dC_2}{dt} = k_1 C_1 - k_{23} C_2 + k_{32} C_3 - k_4 C_2$$

$$\frac{dC_3}{dt} = k_{23} C_2 - k_{32} C_3$$

где C_1, C_2, C_3 – концентрации в соответствующем блоке модели (рис. 6).

Уравнения выражают баланс массы вещества в соответствующем блоке модели. Производные, стоящие в уравнении, имеют смысл изменения концентрации за единицу времени. Их величина естественно определяется введенной и выведенной массой вещества за это время.

Решение этих уравнений дает зависимость концентрации $C_2(t)$. Система уравнений – система дифференциальных уравнений первого порядка, аналитическое решение которой затруднительно, решить систему можно с применением специальных методов и ПК.

Упрощенная модель. Рассмотрим более простую модель, в которой предусмотрим возможность введения вещества непосредственно в кровь (в виде непрерывного введения со скоростью Q или разового введения в виде разовой (нагрузочной) дозы m_0). Схема модели показана на рисунке 7.

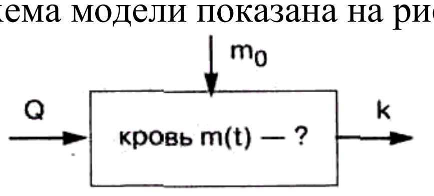


Рис. 7. Схема модели (*k* – константа выведения препарата из крови)

Дифференциальное уравнение (кинетическое уравнение) для $m(t)$ запишется в виде:

$$\frac{dm}{dt} = Q - km$$

где m – масса препарата в крови, dm/dt – скорость изменения массы препарата.

Для решения уравнения запишем в виде $\dfrac{dm}{m - \dfrac{Q}{k}} = -kt$, интегрируя, имеем общее решение уравнения

$$\ln\left(m - \frac{Q}{k}\right) = -kt + \ln A$$

A – постоянная интегрирования, которую найдем из условия введения в момент $t = 0$ нагрузочной дозы (при $t = 0$ $m = m_0$). Тогда $A = m_0 - \dfrac{Q}{k}$ и соответствующее частное решение

$$m - \frac{Q}{k} = \left(m_0 - \frac{Q}{k}\right)e^{-kt}$$

или

$$m = \frac{Q}{k}\left(1 - e^{-kt}\right) + m_0 e^{-kt}$$

Задание 1. Проанализируйте изменение массы ксенобиотика в крови при различных способах введения и для различных параметров m_0, Q и k.

Для этого:

1. Запишите закон изменения $m(t)$ для заданных параметров.
2. Постройте серии графиков $m(t)$.
3. Оцените из графиков характерные величины:

а) время $T_{0,5}$, когда масса препарата в крови уменьшится в 2 раза по сравнению с первоначальной при однократном способе введения. Сравните с теоретическим значением

$$T_{0,5} = \frac{\ln 2}{k}.$$

б) время $T_{0,9}$, когда $m = 0{,}9m_{\text{ст}}$ $\left(m = 0{,}9\dfrac{Q}{k}\right)$ при непрерывном способе введения вещества.

Сравните с теоретическим значением

$$T_{0,9} = \frac{\ln 10}{k}.$$

4. Рассчитайте параметры m_0 и Q для того, чтобы при заданном $k = 0{,}2$ час$^{-1}$ сразу устанавливалась бы оптимальная масса лекарства в крови ($m_{опт} = Q/k$) при одновременном сочетании однократной нагрузки и непрерывного введения вещества, если

1) $m_{опт}$ = 2 мг,
2) $m_{опт}$ = 4 мг,
3) $m_{опт}$ = 6 мг.

Постройте графики.

Задание 2. Проанализируйте изменение $m(t)$ при однократном способе введения вещества:

Параметры	m_0, мг	Q, мг/час	k, 1/час	$T_{0,5}$
1 система	3	0	0,2	
2 система	3	0	0,1	
3 система	3	0	0,05	

Задание 3. Проанализируйте изменение $m(t)$ при непрерывном способе введения вещества:

Параметры	m_0, мг	Q, мг/час	k, 1/час	$T_{0,9}$
1 система	0	1,2	0,2	
2 система	0	0,8	0,2	
3 система	0	0,4	0,2	

Задание 4. Проанализируйте изменение $m(t)$ при сочетанном способе введения вещества ($T_{опт}$ – время, за которое устанавливается постоянная концентрация вещества в крови):

Параметры	m_0, мг	Q, мг/час	k, 1/час	$T_{опт}$
1 система	4,5	0,6	0,2	
2 система	1,5	0,6	0,2	
3 система	3	0,6	0,2	

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЕЗОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Цель работы: Познакомиться с задачей моделирования сезонных процессов в биогеоценозах. Научиться составлять модели сезонных процессов на основе ряда Фурье.

Теоретический материал. Многие экологические процессы изменяют свой характер в зависимости от смены сезонов года. Такие изменения вызывают сезонные колебания тех или иных параметров этих процессов. Изучение сезонных колебаний имеет самостоятельное значение как исследование особого типа динамики.

Сезонность можно понимать как внутригодовую динамику вообще. Моделью периодически изменяющихся уровней служит ряд Фурье, аналитическое выражение которого применительно к динамике имеет вид

$$N_t = a_0 + \sum_{k=1}^{m} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

В этом уравнении величина k определяет номер гармоники ряда Фурье и может быть взята с необходимой степенью точности (чаще всего от 1 до 4). Параметры уравнения определяются методом МНК по формулам

$$a_0 = \frac{1}{n}\sum y; \qquad a_k = \frac{2}{n}\sum y\cos kt; \qquad b_k = \frac{2}{n}\sum y\sin kt.$$

Для изучения специфического периодического явления сезонности берем n =12 (число месяцев в году), а ряд динамики можно записать в виде, показанном в таблице 2.

Таблица 2. Ряд динамики для определения сезонных колебаний

0	π/6	π/3	π/2	2π/3	5π/6	π	7π/6	4π/3	3π/2	5π/3	11π/6
y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}

Ряд Фурье годится и для построения регрессионных моделей колебательных процессов, связанных с суточной и месячной ритмикой. Для построения временной шкалы пользуемся следующей зависимостью: от 0 каждое последующее измерение производится через временной промежуток, равный $2\pi/n$ (где n – количество измерений за полный период цикла).

Задание. Постройте сезонную модель средствами Ms. Excel для следующих начальных данных:

День	Измерение	День	Измерение
1	38,3	16	90,5
2	24,6	17	93,6
3	10,2	18	94
4	9,7	19	93,2
5	10,1	20	95,4
6	19,8	21	91,8
7	26,5	22	94,3
8	41,6	23	90,9
9	57,8	24	91
10	63,4	25	89,1
11	71,2	26	88,6
12	77,3	27	83,6
13	80	28	79,5
14	82,2	29	72,6
15	87,4	30	68,4

ПРИМЕНЕНИЕ РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА ПРИ РЕШЕНИИ ЭКОЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Цель работы: познакомиться с методикой построения регрессионных зависимостей по эмпирическим данным. Научиться строить линии тренда.

При построении математических зависимостей могут быть две формы связей между функцией и переменными: функциональная и регрессионная. Если функциональные связи точно выражаются аналитическими уравнениями, то регрессионные связи выражаются уравнениями лишь приближенно. В общем случае можно сказать, что связь между функцией и аргументами будет тогда функциональной, когда будут учтены все аргументы, определяющие значения функции.

Уравнение регрессии составляется исследователем на основе характера связи между функцией и аргументами. Вопрос о форме связи решается, как правило, поэтапно. Вначале рассматривается линейная форма связи вида:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n,$$

где x_i – факторы (i = 1, 2, …, n), так как такая форма связи часто встречается на практике и для нее разработан хороший математический аппарат.

При установлении тесноты связи между y и x решается задача установления строгости соблюдения функциональной зависимость между изменениями y и x. Для оценки тесноты связи используются показатели:

В случае линейной формы связи:

- ✓ Коэффициент парной корреляции r_{yx}, r_{xy}, характеризующий близость связи к линейной;
- ✓ Коэффициент частной корреляции, характеризующий тесноту связи между изучаемыми переменными при условии, что влияние остальных факторов исключается;
- ✓ Коэффициент множественной корреляции, характеризующий суммарное влияние всех факторов на величину y.

В случае нелинейной формы связи:

- ✓ Корреляционное отношение ρ, указывающее, насколько строго соблюдается функциональная связь (в случае линейной $\rho = r_{yx}$);
- ✓ Множественное корреляционное отношение, характеризующее тесноту связи между y и x.

Таблица 3. Типы корреляционно-регрессионного анализа

Основание деления	Корреляционно-регрессионный анализ	
по количеству переменных	парный	множественный
в зависимости от формы связи	линейный	нелинейный

Метод наименьших квадратов (МНК). Предположим, что форма связи между x и y такова, что

$$\acute{y} = f(x)$$

Ряд измерений y_i, соответствующих x_i, с помощью этого уравнения можно выровнять, получив ряд $\acute{y}_i$. Если найти отклонения выровненных значений $\acute{y}_i$ от y_i, так, что

$$\delta = y_i - \acute{y}_i$$

то МНК состоит в том, чтоб найти

$$S = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 \Rightarrow \min\ .$$

В случае линейной функции $\acute{y} = ax + b$ для нахождения min возьмем частные производные от $S(a, b)$ и приравняем их к «0».

$$\frac{\partial S(a,b)}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b}\left[\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - (ax_i + b)\right]^2\right] = 0$$

$$\frac{\partial S(a,b)}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}\left[\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - (ax_i + b)\right]^2\right] = 0$$

Решая систему нормальных уравнений МНК, получим:

$$a = \frac{\sum x_i y_i - \sum x_i \cdot \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x\right)^2} \qquad b = \frac{\sum y_i \cdot \sum x_i^2 - \sum x_i y_i \cdot \sum x_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$$

В качестве меры адекватности регрессионной модели статистическим данным часто используют коэффициент детерминации

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\acute{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}$$

где $\acute{y}_i$ – расчетное значение (теоретическое по полученному уравнению регрессии $\acute{y} = ax + b$), а $\bar{y}$ – среднее значение y.

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \ ,$$

y_i – значение y в i-том опыте ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Чем больше значения R^2, тем выше степень адекватности уравнения регрессии опытным данным.

При нелинейной форме связи могут быть использованы два подхода:

- ✓ первый – когда нелинейная форма связи представляется в виде линеаризованной функции;
- ✓ второй – когда используется интерационный нелинейный метод наименьших квадратов.

В первом случае исследователь сначала выбирает форму нелинейной связи, затем ее линеаризует, преобразуя члены уравнения регрессии, например, как это показано в таблице 4.

Затем используется метод МНК для линеаризованного уравнения, откуда определяются коэффициенты уравнения регрессии. Полученное уравнение регрессии затем вновь преобразуется в нелинейную форму.

В таблице 5 приведены нормальные уравнения для некоторых функций, имеющих более 2-х коэффициентов.

Таблица 4. Пример преобразования членов уравнения регрессии

Функция	Линеаризующие преобразования			
	Преобразование переменных		Преобразование коэффициентов	
	y'	x'	b'	a'
$y=\frac{a}{x}+b$	y	$\frac{1}{x}$	b	a
$y=\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{y}$	x	b	a
$y=\frac{x}{ax+b}$	$\frac{x}{y}$	x	b	a
$y = a^x b$	$\ln y$	x	$\ln b$	$\ln a$
$y=be^{ax}$	$\ln y$	x	$\ln b$	a
$y=\frac{1}{ae^{-x}+b}$	$\frac{1}{y}$	e^{-x}	b	a
$y=x^a b$	$\ln y$	$\ln x$	$\ln b$	a
$y=a\ln x+b$	y	$\ln x$	b	a
$y=\frac{b}{a+x}$	$\frac{1}{y}$	x	$\frac{a}{b}$	$\frac{1}{b}$
$y=\frac{bx}{a+x}$	$\frac{1}{y}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{1}{b}$
$y=b+ax^n$	y	x^n	b	a
$y=\frac{K}{\left(\frac{K}{N_0}-1\right)e^{-rx}+1}$	$\ln\left(\frac{K}{y}-1\right)$	x	$\ln\left(\frac{K}{N_0}-1\right)$	$-r$

Таблица 5. Нормальные уравнения МНК для некоторых функций

Функции	**Нормальные уравнения**
$y=a+bx+cx^2$	$na+b\sum x+c\sum x^2=\sum y$ $a\sum x+b\sum x^2+c\sum x^3=\sum xy$ $a\sum x^2+b\sum x^3+c\sum x^4=\sum x^2 y$
$y=ab^x c^{x^2}$	$n\lg a+\lg b\sum x+\lg c\sum x^2=\sum \lg y$ $\lg a\sum x+\lg b\sum x^2+\lg c\sum x^3=\sum x\lg y$ $\lg a\sum x^2+\lg b\sum x^3+\lg c\sum x^4=\sum x^2\lg y$

Задание 1. Постройте уравнения регрессии, выровняйте ряд и найдите коэффициент детерминации для следующих экспериментальных данных.

Варианты экспериментальных данных:

Вариант 1. У 10 человек были исследованы проницаемость сосудов сетчатки (x) и ее электрическая активность (y):

x	19,5	15,0	13,5	23,3	6,3	2,5	13,0	1,8	6,5	1,8
y	0,0	38,5	59,0	97,4	119,2	129,5	198,7	248,7	318,0	438,5

Вариант 2. У взрослых мужчин были измерены рост (x) и вес (m):

x (см)	165	176	175	168	167	172	175	180
m (кг)	56	75	70	61	62	63	72	80

Вариант 3. Получены следующие данные о наибольшей массе растворимого азотнокислого натрия (m) от температуры раствора (t):

t (°C)	0	4,0	10,0	15,0	21,0	29,0	36,0
m (г)	66,7	71,0	76,3	80,6	85,7	92,9	99,4

Вариант 4. При изучении зависимости показателя преломления (n) раствора от концентрации в нем соли (c) получены следующие результаты:

c (г/см^3)	0,000	0,025	0,050	0,10	0,20	0,4	0,8
n	0,333	1,338	1,340	1,350	1,362	1,377	1,389

Задание 2. Установите регрессионную зависимость, Найдите коэффициент детерминации для следующих пар значений:

Вариант 1

x	8	10	12	14	16	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38
y	0,72	0,85	0,98	1,02	1,03	1,1	1,15	1,08	1,06	1,04	0,93	0,82	0,70	0,55	0,43

Вариант 2

x	3	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	18	20
y	720	610	510	490	460	400	350	300	305	270	240	210	200	170	130

Вариант 3

x	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1	0,12	0,13	0,14	0,15	0,16	0,17	0,18	0,19	0,2
y	25	28	32	38	37	41	43	48	49	52	51	55	59	58	61

Вариант 4

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	15	18
y	0,3	0,6	1,5	2,3	4,0	7,1	11,6	15,4	22,2	25,4	29,7	28,5	29,2	28,9	29,9

Вариант 5

x	10	13	17	21	23	27	29	33	37	40	42	46	49	53	57
y	98	109	117	123	126	130	133	130	125	122	120	117	111	105	98

Вариант 6

x	24	31	44	51	67	78	81	90	101	110	124	136	139	152	174
y	6,1	6,7	7,4	8,2	9,1	10,0	11,1	12,2	13,5	15,0	16,6	18,3	20,2	22,4	27,3

Вариант 7

x	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1	0,12	0,13	0,14	0,15	0,16	0,17	0,18	0,19	0,2
y	19,0	20,5	22,4	22,3	25,1	25,5	26,1	27,8	28,9	28,7	29,5	31,7	31,6	32,5	33,4

Вариант 8

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	15	18
y	0,22	0,40	0,68	1,05	1,49	1,80	2,04	2,26	2,31	2,35	2,37	2,39	2,39	2,40	2,40

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ В ЭКОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ

Цель работы: ознакомиться с методом линейного программирования, научиться использовать встроенную функцию «Поиск решения» при решении задач оптимизации в экологических моделях.

Теоретический материал. В настоящее время новые достижения математики и современной вычислительной техники находят все более широкое применение в экологических исследованиях и планировании. Этому способствует развитие таких разделов математики как математическое программирование, теория игр, теория массового обслуживания и других. Составными частями математического программирования являются: линейное, нелинейное и динамическое программирование. Слово «программирование» здесь и в аналогичных терминах обязано отчасти историческому недоразумению, отчасти неточному переводу с английского. По-русски было бы лучше употребить слово «планирование».

Временем рождения линейного программирования принято считать 1939 г., когда была напечатана работа Леонида Витальевича Канторовича «Математические методы организации и планирования производства».

Линейное программирование – наука о методах исследования и отыскивания наибольших и наименьших значений линейной функции, на неизвестные которой наложены линейные ограничения.

Американский математик А.Данцинг в 1947 г. разработал весьма эффективный конкретный метод численного решения задач линейного программирования (он получил название симплекс-метода). Идеи линейного программирования в течение пяти-шести лет получили грандиозное распространение в мире и имя Данцига стало повсюду широко известно.

Свое второе рождение линейное программирование получило в начале пятидесятых годов с появлением ЭВМ. Тогда началось всеобщее увлечение линейным программированием, вызвавшее, в свою очередь, развитие других разделов математического программирования. В 1975 г. академик Л.В. Канторович и американский профессор Тьяллинг Купманс получили Нобелевскую премию по экономическим наукам за «вклад в разработку теории и оптимального использования ресурсов в экономике».

Основой реализации любой задачи управления является принятие конкретным лицом оптимального решения. Примерами задач линейного программирования в сфере экологии могут быть, например, задача о наилучшем использовании ресурсов, задача о выборе оптимальных технологий, т.е. такие, в которых обеспечивается выполнение поставленной задачи с минимальными затратами и максимальным эффектом.

Для оценки эффективности планируемых мероприятий и управленческих действий вводится понятие ***целевой функции***, отражающей качество планирования и управления, выраженных через систему определенных числовых параметров и принимающей наибольшее или наименьшее значение.

В основе целевой функции лежат:

- ✓ некоторый критерий оптимальности, с учетом которого осуществляется выбор путем сравнения возможных вариантов рассматриваемой системы;
- ✓ ограничения, определяющие возможности и границы развития этой системы с точки зрения достаточности ресурсов;
- ✓ переменные величины – исходные задачи линейного программирования.

Рассмотрим на примере технологию решения задачи линейного программирования с использованием встроенной функции «Поиск решения» табличного процессора Excel.

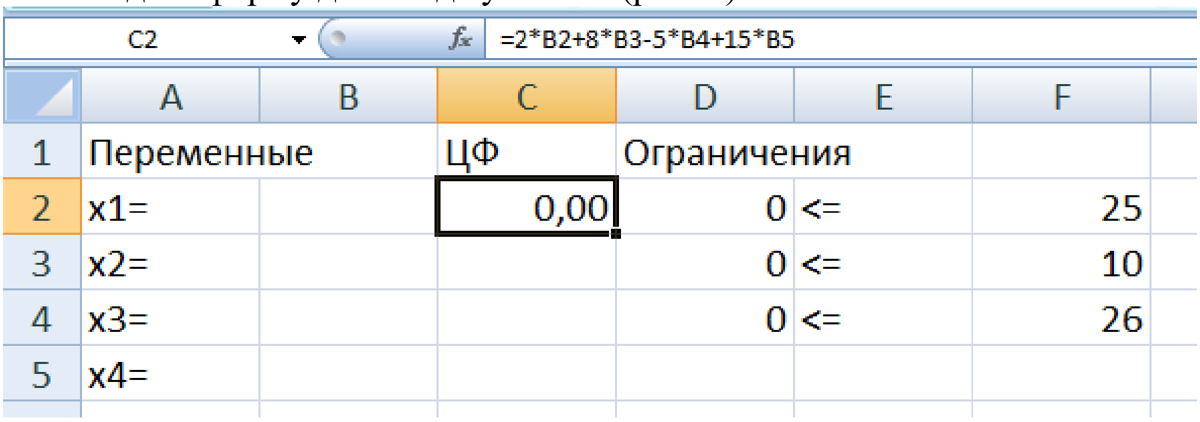
Пример. Найти максимум функции $F_{max} = 2x_1 + 8x_2 - 5x_3 + 15x_4$ при условиях:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + 10x_4 \le 25 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 \le 10 \\ 2x_1 + 10x_2 + 2x_3 - 5x_4 \le 26 \end{cases}$$

и $x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$.

Решение:

1. Создать форму для ввода условий (рис. 8).



C2 =2*B2+8*B3-5*B4+15*B5

	A	B	C	D	E	F
1	Переменные		ЦФ	Ограничения		
2	x1=		0,00	0	<=	25
3	x2=			0	<=	10
4	x3=			0	<=	26
5	x4=					

Рис. 8. Форма для ввода условий

2. В ячейку C2 записать целевую функцию = 2*B2+8*B3–5*B4+15*B5.

3. В ячейки D2:D4 записать левые части рассматриваемой системы:

=3*B2–1*B3+1*B4+10*B5,

=1*B2+2*B3+1*B4+5*B5,

=2*B2+10*B3+2*B4–5*B5.

4. В ячейках F2:F4 отобразить значения ограничений.

5. Выбрать «Поиск решения». В диалоговом окне «Поиск решения» в рабочие поля ввести данные (рис. 9):

- ✓ «Установить целевую ячейку» – адрес C2 (ввести адрес ячейки в информационное поле «Установить целевую ячейку», где записывается оптимизирующий результат решения задачи).
- ✓ «Равной» – «максимальному значению».
- ✓ «Изменяя ячейки» – диапазон ячеек, оставленных для переменных (B2:B5). (Ввести адреса ячеек, значения в которых будут изменяться до тех пор, пока не будет оптимизирован результат, в информацион-

ное поле «Изменяя ячейки». Изменяемые ячейки не должны содержать формулы, их значения влияют на значения целевой функции).

- ✓ Нажать левой кнопкой мыши «Добавить».
- ✓ В диалоговом окне «Добавление ограничения» в поле «ссылка на ячейку» ввести адрес ячейки (ячеек), в поле «Ограничение» - значение, затем нажать кнопку «ОК». Последовательно ввести все ограничения.

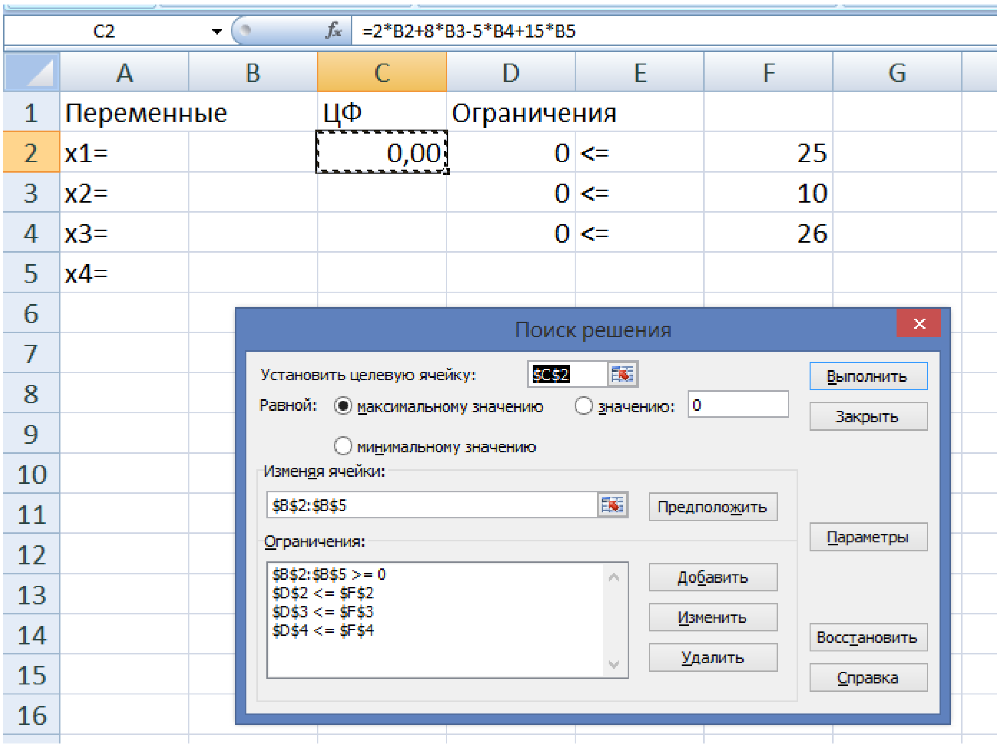


Рис. 9. Функция «Поиск решения»

6. Нажать левой кнопкой мыши «Выполнить», результат – рис. 10. Выберите тип отчета «Результаты».

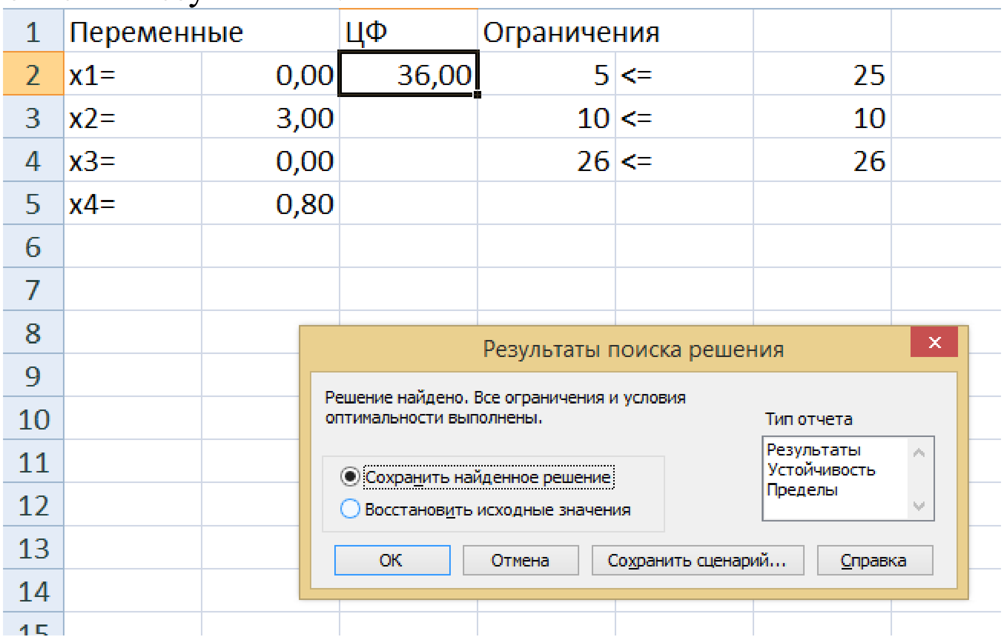


Рис.10. Ввод данных в диалоговое окно функции «Поиск решения»

В отчет «Результаты» включаются исходные и конечные значения целевой и влияющих ячеек, дополнительные сведения об ограничениях.

Задание. Найти максимум линейной функции при заданной системе ограничений и условиях неотрицательности.

Вариант	ЦФ	Система ограничений	Условия неотрицательности
1	$F_{max} = 2x_1 + 3x_2$	$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 9 \\ x_1 + x_2 \le 7 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$
2	$F_{max} = 3x_1 + 2x_2$	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 12 \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$
3	$F_{max} = 2x_1 + 3x_2$	$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 + 2x_2 \le 6 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$
4	$F_{max} = 3x_1 + 2x_2$	$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4 \\ 2x_1 + x_2 \le 6 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$
5	$F_{max} = x_1 + x_2$	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 18 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ

1. Основополагающий принцип моделирования. Определение модели.
2. Структура математической модели, ее составляющие.
3. Классификация математических моделей.
4. Баланс численности популяции.
5. Одновидовые модели с непрерывным временем: модели Мальтуса и Ферхюльста.
6. Одновидовые модели с дискретным временем: модель непрерывного развития популяции, модель Скеллама, модель, учитывающая интенсивность конкуренции (Смита и Слаткина), модель, учитывающая запаздывание во времени. Явление запаздывания, лаг-период.
7. Факторы, определяющие характер динамики популяции.
8. Способы задания времени в моделях динамики. Отличия временных промежутков дифференциальных и конечно-разностных моделей.
9. Допущения в модели Лесли, ее формулировка.
10. Идентификация возрастных классов, коэффициентов выживаемости и коэффициентов рождаемости на основании эмпирических данных.
11. Формулировка токсикологической модели, способы введения вещества.
12. Возможности модификации токсикологической модели для анализа разных видов антропогенного воздействия на экосистемы.
13. Биологические ритмы, их виды.
14. Характеристики ритма.
15. Виды корреляционно-регрессионного анализа.
16. Корреляция между двумя признаками, коэффициент корреляции.
17. Мера линейности связи между двумя признаками, построение регрессионного уравнения.
18. Нелинейные связи, линеализирующие преобразования.
19. Коэффициент детерминации.
20. Задача оптимизации в экологических моделях.
21. Древо решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ризниченко, Г.Ю. Математическое моделирование биологических процессов. Модели в биофизике и экологии: учебное пособие для вузов / Г.Ю. Ризниченко. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2021.— 181 с.— (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-07037-8. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/470480 .

2. Гашев, С.Н. Математические методы в биологии: анализ биологических данных в системе Statistica : учебное пособие для вузов / С. Н. Гашев, Ф. Х. Бетляева, М. Ю. Лупинос. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 207 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-02265-0. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/472320.

3. Математическое и компьютерное моделирование в экологии : учебное пособие / С. В. Бобырев, А. В. Косарев, А. Л. Подольский [и др.]. — Саратов : Саратовский государственный технический университет имени Ю.А. Гагарина, ЭБС АСВ, 2012. — 106 с. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: https://www.iprbookshop.ru/76487.html

4. Ризниченко, Г. Ю. Математические модели в биофизике и экологии / Г. Ю. Ризниченко. — Москва, Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2019. — 184 с. — ISBN 978-5-4344-0734-2. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: https://www.iprbookshop.ru/91957.html